Математические аспекты многопетлевых вычислений в квантовой теории поля

Ли Р.Н. (ИЯФ СО РАН)

Введение

- Квантовая теория поля – стандартный язык и инструментарий для описания взаимодействий элементарных частиц.
- Примеры: квантовая электродинамика, квантовая хромодинамика, расширения Стандартной модели.
- Стартовая точка построения КТП – лагранжиан

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[i\hat{\partial} - m]\psi - \frac{1}{4}F^2 - e\bar{\psi}\hat{A}\psi$$

- Стандартный подход к учёту взаимодействия – теория возмущений по константе взаимодействия.
- Порядки теории возмущений можно представить графически с помощью фейнмановских диаграмм.
- Замкнутым петлям на диаграммах соответствует интегрирование. Некоторые из появляющихся петлевых интегралов расходятся.
- Необходимо выполнить процедуру перенормировок: введение регуляризации ⇒ выражение исследуемой величины через **наблюдаемые** параметры ⇒ снятие регуляризации.
- Наиболее удобна размерностная регуляризация – вычисление интегралов по пространству-времени размерности $d = 4 - 2\epsilon$, отличной от 4. Снятие регуляризации: предел $\epsilon \to 0$.

Введение
Многопетлевые интегралы: мотивация

- Вычисление радиационных поправок: точность измерения свойств частиц зависит не только от параметров экспериментальных установок, но и от точности теоретических результатов.
- Увеличение точности теоретических предсказаний особенно важно в контексте поиска Новой физики.
- Хороший пример требуемой теоретической точности – результаты экспериментов по измерению магнитных моментов электрона и мюона:

$$\mu_e = 1.00115965218073(28)\frac{e\hbar}{2m_e c}\,, \quad \mu_\mu = 1.00116592091(63)\frac{e\hbar}{2m_\mu c}$$

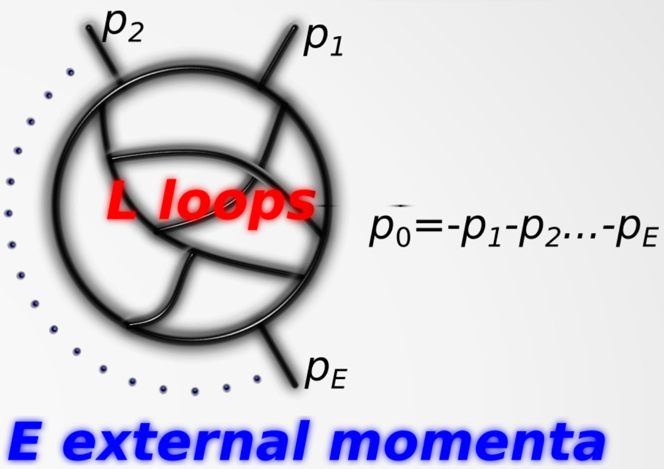
- Многопетлевые вычисления могут дать важную подсказку как устроена КТП вне рамок теории возмущений.

Основная проблема на пути от лагранжиана КТП до амплитуд и экспериментально наблюдаемых сечений и вероятностей в рамках теории возмущений – математическая задача вычисления **петлевых интегралов**.

Петлевые интегралы

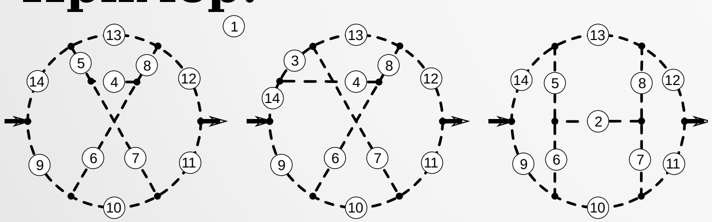
Общий вид петлевого интеграла

$$J = \int \frac{d^d l_1 \dots d^d l_L}{D_1^{n_1} \dots D_N^{n_N}}$$



где D_α – функции петлевых и внешних импульсов.

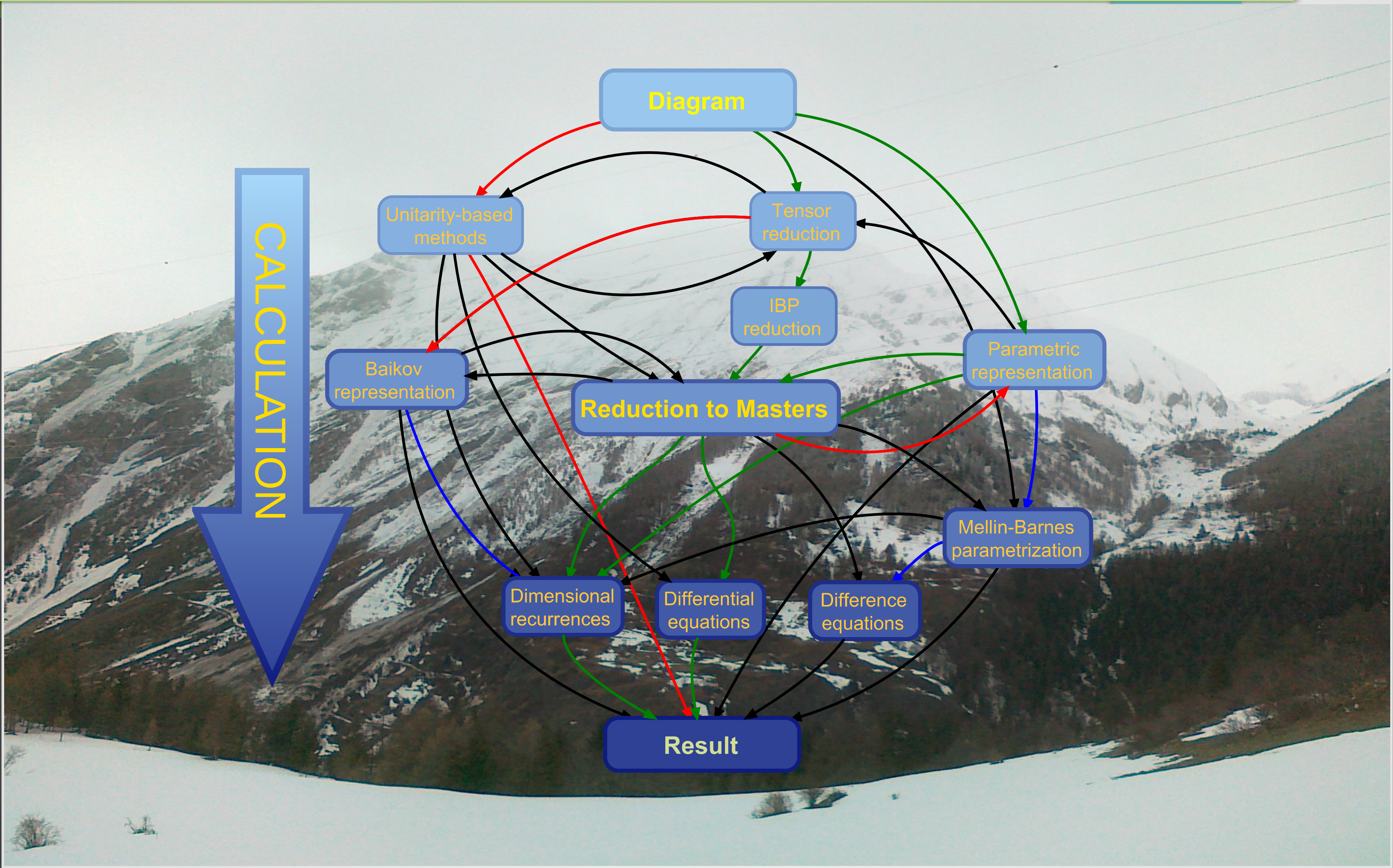
Пример:



$$D_1 = (l_4+q)^2, D_2 = (l_4-l_2)^2, D_3 = (l_2-l_3+l_4)^2,$$
$$D_4 = (l_1-l_2+l_3-l_4)^2, D_5 = (l_4-l_1)^2, D_6 = (l_1-l_2)^2,$$
$$D_7 = (l_2-l_3)^2, D_8 = (l_3-l_4)^2, D_9 = (l_1+q)^2, D_{10} = (l_2+q)^2,$$
$$D_{11} = (l_3+q)^2, D_{12} = l_3^2, D_{13} = l_4^2, D_{14} = l_1^2$$

- Число различных интегралов может достигать нескольких сотен и больше.
- Каждый интеграл является сложным математическим объектом,сложность быстро растёт с числом петель.
- Требуются **новые математические подходы**.

Методы многопетлевых вычислений

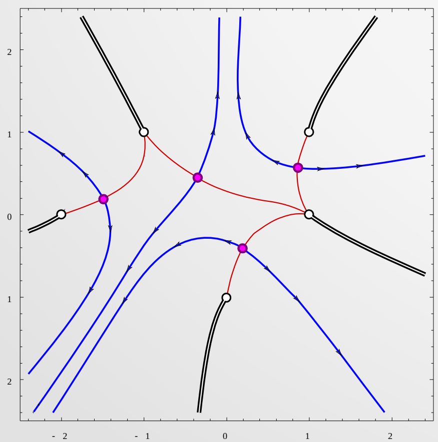


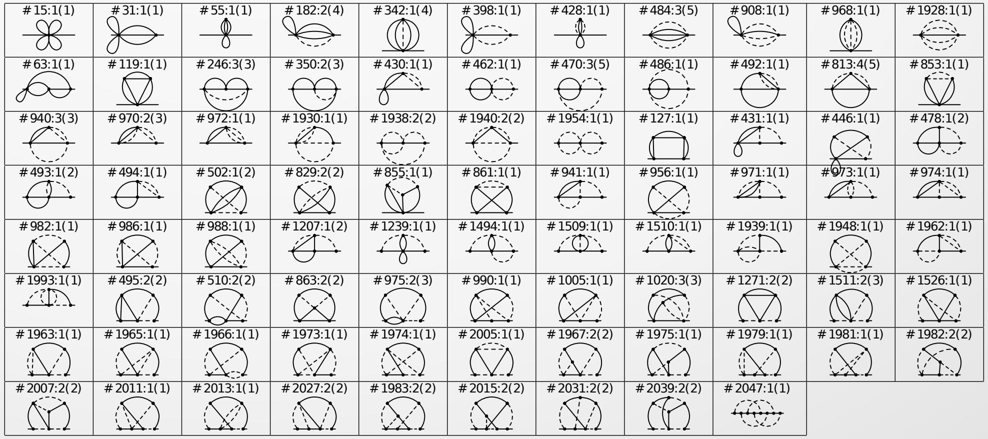
Приведение к мастер-интегралам

- Идея приведения интегралов к “мастер”-интегралам с помощью IBP-тождеств. *[Четыркин&Ткачов, 1981]*

$$0 = \int d^d l_1 \ldots d^d l_L \frac{\partial}{\partial l_k} \cdot q_n D_1^{-n_1} \ldots D_N^{-n_N}$$

- “Brute-force” алгоритм приведения *[Laporta, 2000]*
- Наблюдение о структуре алгебры Ли IBP-тождеств, идея использования этой структуры для приведения *[Ли, 2008]*
- Создание эвристического алгоритма приведения *LiteRed [Ли, 2012]*
- Способ вычисления числа мастер-интегралов как числа Милнора характеристического полинома *[Ли&Померанский, 2013]*



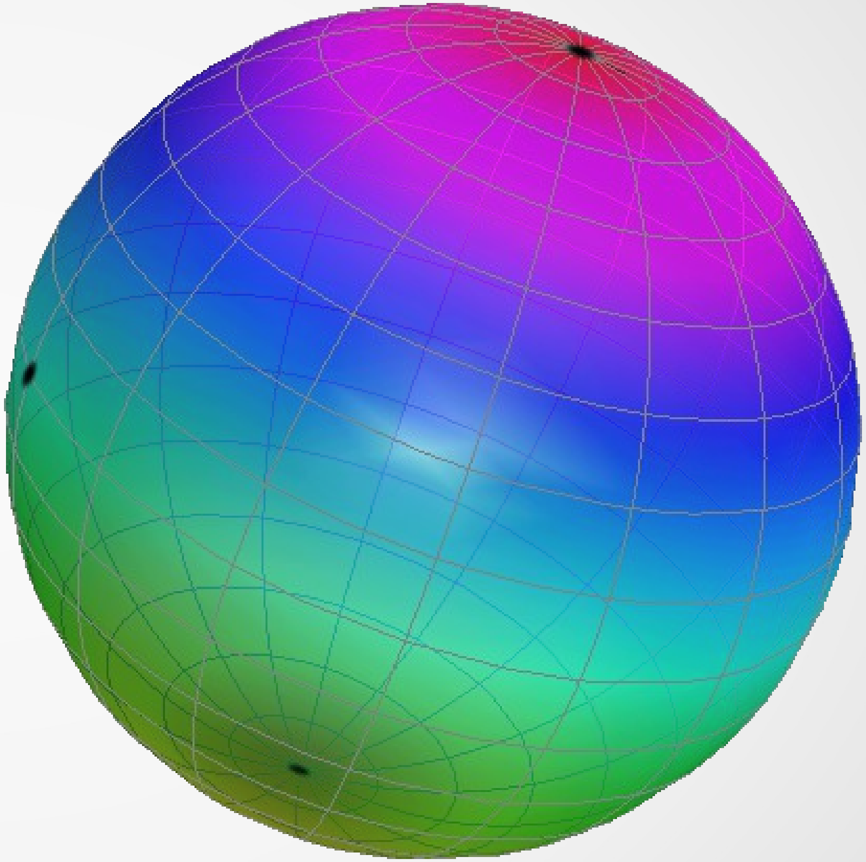


Дифференциальные уравнения

- Идея использования дифференциальных уравнений для вычисления мастер-интегралов *[Котиков, 1991; Remiddi, 1997]*
$$\partial_x \mathbf{J}(x) = \mathbb{M}(\epsilon, x)\mathbf{J}(x)$$
- Метод дифференциальных уравнений быстро стал основным методом многопетлевых вычислений *(например, [Gehrmann&Remiddi, 2000])*.
- Наблюдение о возможности выбора мастер-интегралов, подчиняющихся существенно более простой системе уравнений *[Henn, 2013]*
$$\partial_x \mathbf{J}(x) = \epsilon\mathbb{M}(x)\mathbf{J}(x)$$
- Алгоритм приведения системы дифференциальных уравнений к ϵ-форме с помощью фуксовой теории дифференциальных уравнений *[Ли, 2014]*. Неожиданная связь с 21-ой проблемой Гильберта – для систем, для которых глобальная фуксовая форма существует, алгоритм даёт возможность её найти.
- Применения ϵ-формы: вычисление пятиугольной диаграммы *[Козлов& Ли, 2016]*, вычисление полного сечения рождения электро-позитронных пар в столкновениях тяжёлых ионов при произвольных энергиях *[Ли&Мингулов, 2016]*.

Дифференциальные уравнения

- Существующие алгоритмы имели *локальный* характер. Улучшая свойства системы в одной точке, они ухудшали свойства в другой.
- В работе *[Ли, 2014]* было показано, как “балансировать” между парами точек с тем, чтобы добиться глобальной редукции.



Расширенная комплексная плоскость переменной x.

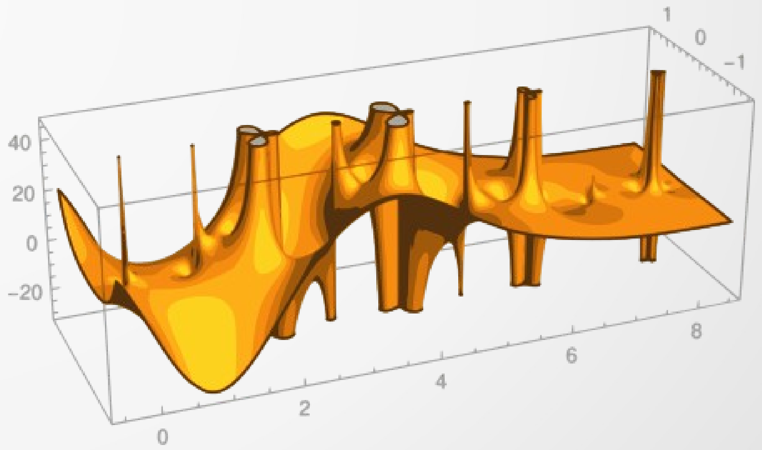
Вычисление мастер-интегралов с помощью размерностных рекуррентных соотношений

- Иногда метод дифференциальных уравнений неприменим.

  Мастер-интегралы, необходимые для вычисления аномального магнитного момента, относятся как раз к этому классу.
- Вычисления таких семейств основывались либо на явном интегрировании (с использованием представления Меллина-Барнса), либо на методе Лапорты *[Laporta,2000]*– построении рекуррентных соотношений для “обобщенных” мастер-интегралов и численном их решении.
- Идея использования размерностных рекуррентных соотношений и аналитических свойств петлевых интегралов, как функций размерности пространства-времени *[Ли, 2010]* – метод DRA.
- Применение метода для нескольких семейств мастер-интегралов, включая вычисление некоторых мастер-интегралов для вычисления *g-2* в 4 петлях *[Ли&Смирнов&Смирнов, 2010,2011;Ли&Терехов, 2011; Ли&Смирнов, 2011,2012;Lee&Marquard&Smirnov&Smirnov&Steinhauser 2013].*
- Создание пакета *SummerTime* для использования результатов метода DRA *[Ли&Мингулов, 2015].*

Идея метода DRA

- Мастер-интегралы – мероморфные функциями параметра *d* (размерности пространства-времени).
- ТФКП – мероморфная функция полностью определяется своими особенностями.
- Размерностные рекуррентные соотношения – можно ограничиться анализом особенностей на вертикальной полосе ширины 2.



Открытые проблемы
Приведение к мастер-интегралам

- Несмотря на все усилия, задача приведения многопетлевых интегралов к мастер-интегралам остаётся нерешённой. Существует лишь подход, основанный на прямом переборе (алгоритм Лапорты), и эвристический подход, реализованный в пакете *LiteRed*. Между тем, оба этих подхода, похоже, становятся недостаточными для современных приложений.
- Возможно, решение задачи приведения лежит в области теории D-модулей.Требуется некоторое нетривиальное обобщение алгоритмов нахождения знаменитых базисов Грёбнера на случай приведения по прямой сумме левого и правого идеалов в алгебре Вейля.

Открытые проблемы
Приведение дифференциальных уравнений

- Обобщение алгоритма на случай нескольких переменных. Это обобщение очень важно для задач вычисления радиационных поправок к дифференциальным сечениям процессов.
- В некоторых случаях ϵ-форма оказывается недостижима, по крайней мере, посредством рациональных преобразований. Можно ли для этих случаев добиться ϵ-формы расширением класса преобразований остаётся открытым вопросом.

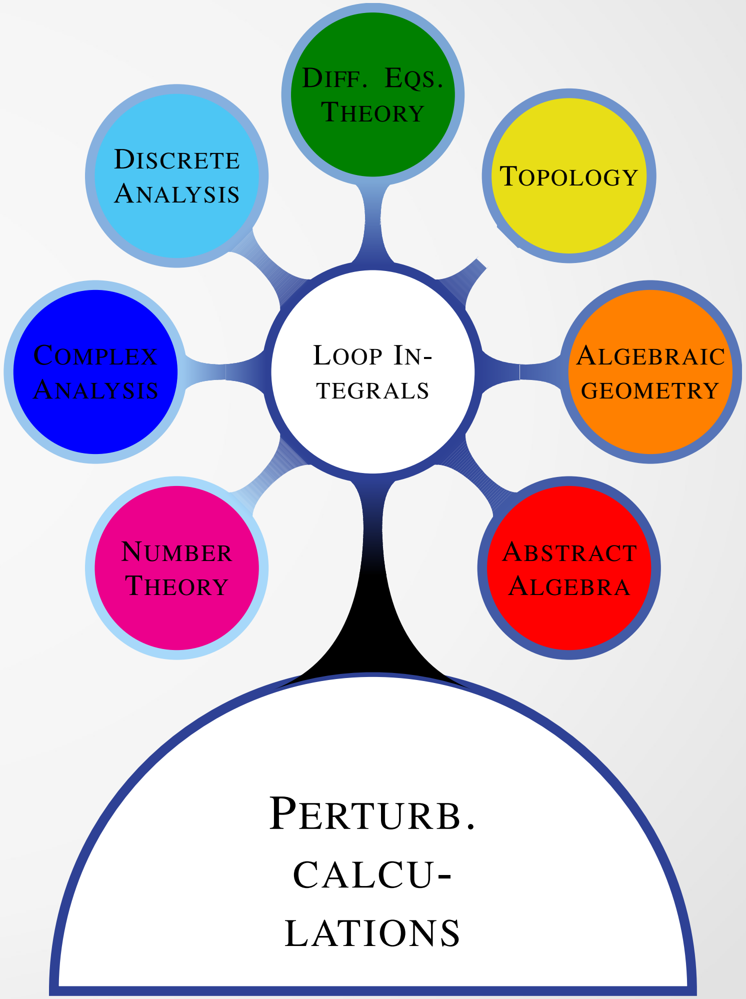
Открытые проблемы
Использование размерностных рекуррентных соотношений

- Обобщение метода DRA на случай нетреугольных систем рекуррентных соотношений. Принципиальная возможность такого обобщения была продемонстрирована в *[Ли&Смирнов, 2012]*.

Заключение

Многопетлевые вычисления – это

- Множество физических приложений.
- Красивая математика.
- Открытые проблемы.



Спасибо за внимание!

Практические результаты

- *LiteRed* используется в множестве вычислений, в частности, связанных с вычислением радиационных поправок
  - к инклюзивным слабым распадам тяжёлых адронов *[T. Mannel, A. Pivovarov, D. Rosenthal, 2015]*
  - к рождению бозона Хиггса из двух глюонов *[Y. Li, A. v. Manteuffel, M. Schabinger, H. Zhu, 2015]*
  - к рождению пары топ-кварков из двух легких кварков *[G. Abelof, A. Gehrmann-De Ridder, I. Majer 2015]*
- Метод DRA использовался для аналитического вычисления некоторых четырёхпетлевых вкладов в аномальный магнитный момент мюона *[Lee&Marquard&Smirnov&Smirnov&Steinhauser 2013]*.
- Приведение к ϵ-форме использовалось для вычисления полного сечения рождения электрон-позитронных пар в столкновениях тяжелых ионов при произвольных скоростях *[Ли&Мингулов, 2016]*. Продолжается работа по вычислению радиационных поправок к инклюзивному рождению бозона Хиггса парой кварков (совместно с C. Anzai, A.Hasselhuhn, M.Höschele, J.Hof, W.Kilgore, M.Steinhauser, T.Ueda).

Результаты метода DRA