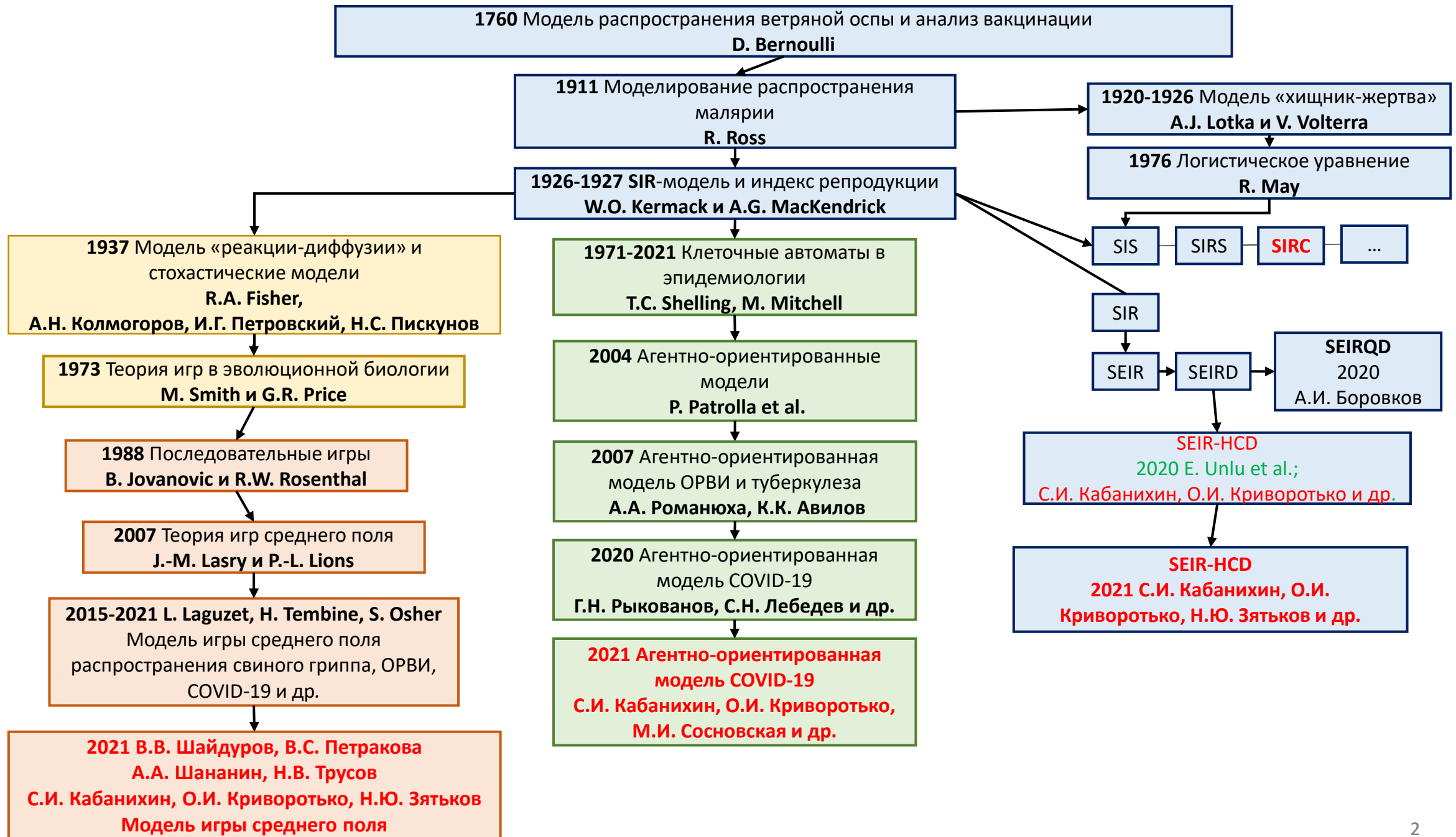


# Моделирование последствий Covid-19: эпидемиология, экономика, экология.

чл.-к. РАН Кабанихин С.И., чл.-к. РАН Шайдуров В.В., чл.-к. РАН Шананин А.А.,  
д.ф.-м.н. Шишленин М.А. (ИМ имени С.Л. Соболева СО РАН),  
к.ф.-м.н. Криворотько О.И. ИВМиМГ СО РАН),  
Петракова В.С. (ИВМ СО РАН),  
Трусов Н.В. (МГУ имени М.В. Ломоносова)

Доклад на общем собрании РАН

15.12.2021



# Модель SEIR-HCD прямая и обратная задачи

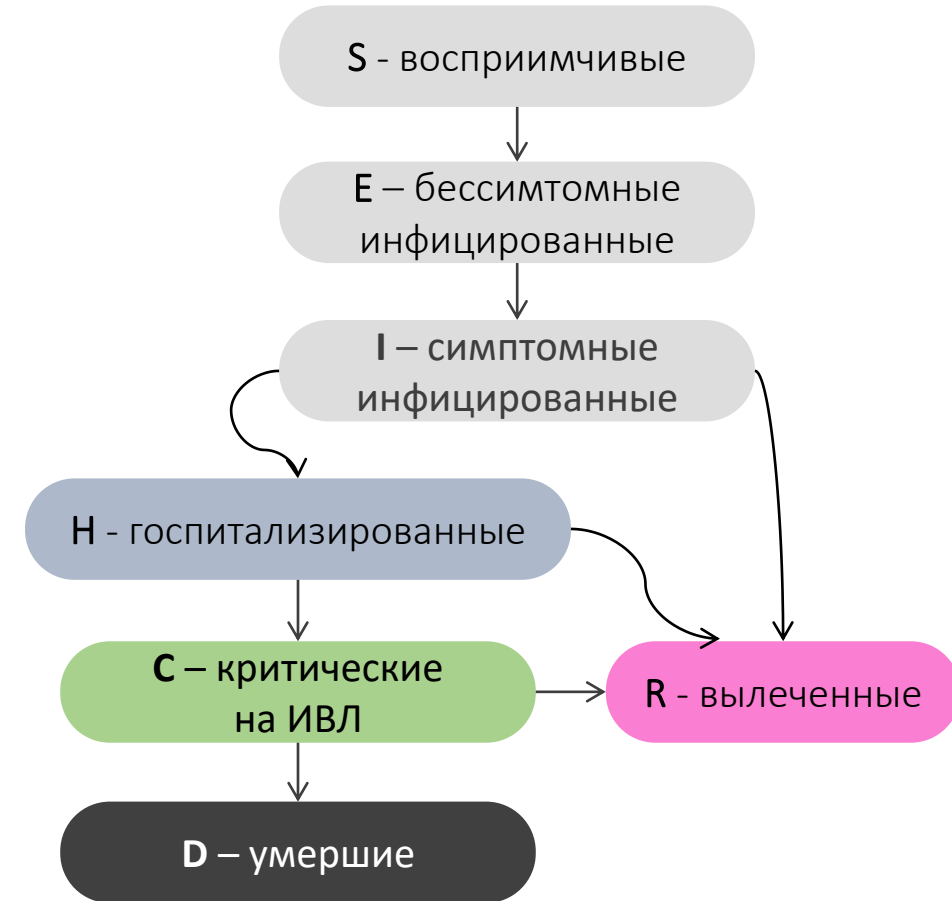
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\frac{5 - a(t - \tau)}{5} \left( \alpha_E(t) \frac{S(t)E(t)}{N(t)} + \alpha_I(t) \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \right), \\ \frac{dE}{dt} = \frac{5 - a(t - \tau)}{5} \left( \alpha_E(t) \frac{S(t)E(t)}{N(t)} + \alpha_I(t) \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \right) - \frac{1}{t_{inc}} E(t), \\ \frac{dI}{dt} = \frac{1}{t_{inc}} E(t) - \frac{1}{t_{inf}} I(t), \\ \frac{dR}{dt} = \frac{\beta}{t_{inf}} I(t) + \frac{1 - \varepsilon_{HC}}{t_{hosp}} H(t), \\ \frac{dH}{dt} = \frac{1 - \beta}{t_{inf}} I(t) + \frac{1 - \mu}{t_{crit}} C(t) - \frac{1}{t_{hosp}} H(t), \\ \frac{dC}{dt} = \frac{\varepsilon_{HC}}{t_{hosp}} H(t) - \frac{1}{t_{crit}} C(t), \\ \frac{dD}{dt} = \frac{\mu}{t_{crit}} C(t). \end{array} \right.$$

**Прямая задача:** найти вектор  $(S, E, I, R, H, C, D)$  по начальным данным  $S(0) = S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0, H(0) = H_0, C(0) = C_0, D(0) = D_0$ .

**Обратная задача:** найти вектор  $\mathbf{q} = (\alpha_E(t), \alpha_I(t), \beta, \varepsilon_{HC}, \mu, E_0, I_0)$ .

**Данные обратной задачи:**

$$I(t_k) = (1 - b_k) f_k, \quad C(t_k) = c_k, \quad D(t_k) = g_k.$$



**Обратная задача:** найти  $\mathbf{q}$  по данным  $f_k, b_k, c_k, g_k, k = 1, \dots, K$ .

# Параметры SEIR-HCD модели

Параметр		Границы
$a(t)$	Индекс самоизоляции (данные Яндекса)	(0, 5)
$\alpha_E(t)$	Параметр заражения между бессимптомной $E(t)$ и восприимчивой $S(t)$ группами населения ( $\alpha_E \gg \alpha_I$ )	(0, 1)
$\alpha_I(t)$	Параметр заражения между инфицированным $I(t)$ и восприимчивым $S(t)$ населением	(0, 1)
$\beta$	Доля инфицированных, которая переносит заболевание без осложнений	(0, 1)
$\varepsilon_{HC}$	Доля госпитализированных случаев $H(t)$ , которым требуется подключение ИВЛ	(0, 1)
$\mu$	Доля смертельных случаев	(0, 0.5)
$\tau$	Латентный период	2 дня
$t_{inc}$	Длительность инкубационного периода	2-14 дней
$t_{inf}$	Длительность периода инфицирования	2,5-14 дней
$t_{hosp}$	Длительность периода госпитализации	4-5 дней
$t_{crit}$	Длительность использования ИВЛ	10-20 дней

## Индекс репродукции вируса для SEIR-HCD модели $\mathcal{R}_0(t)$

$$\mathcal{R}_0(t) = \frac{5 - a(t - \tau)}{5} \left( \alpha_E t_{inc} + \alpha_I t_{inf} \frac{1 + \varepsilon_{HC}(1 - \mu)}{1 - \varepsilon_{HC}(1 - \mu)} \right).$$

Индекс репродукции  $\mathcal{R}_0$  является границей устойчивости состояния равновесия SIR-систем при отсутствии инфицированных

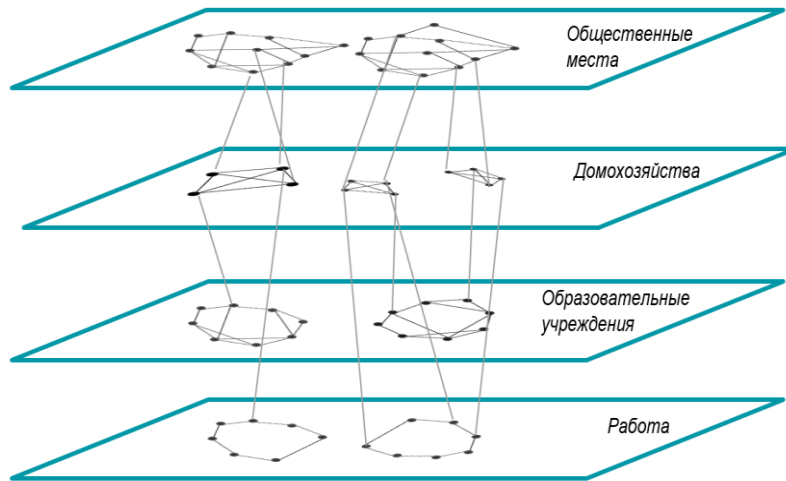
Если  $\mathcal{R}_0 > 1$ , то число заболевших **растет экспоненциально**

Если  $\mathcal{R}_0 \in (0,1)$ , то эпидемия **идет на спад**

### Недостатки SIR-моделей

- Описывает только 1 пик.
- Изменение параметров (мутации вируса, ограничительные меры, вакцинация) приводит к необходимости заново решать обратную задачу и рассчитывать сценарии с новыми параметрами.

# Агентная модель

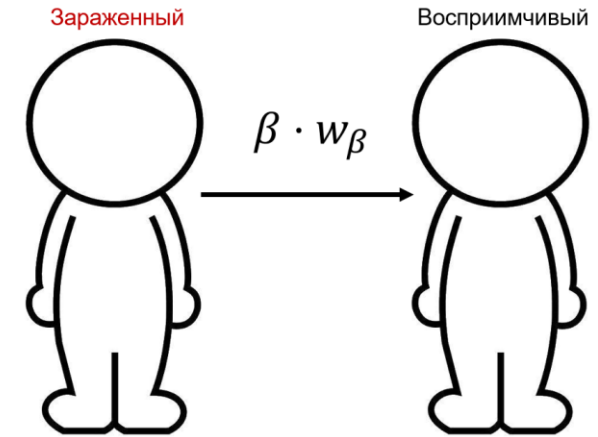


Слои контактов агентов и взаимосвязи между ними в модели

Контакты внутри слоя - полносвязные графы.

Количество вершин - пуассоновская случайная величина, матожидание которой

- для домохозяйства – *размер семьи от 3- до 5*,
- для общественных мест и образовательных учреждений – *20*,
- для организаций (лаборатории, бригады т.п.) – *8*.



Слои контактов	
Домохозяйства	$\beta \cdot 3.0$
Школы и университеты (6-22 года)	$\beta \cdot 0.6$
Организации (22-65 лет)	$\beta \cdot 0.6$
Общественные места	$\beta \cdot 0.3$

# Агентная модель: течение заболевания и тестирование

Каждый агент может находиться в 9 возможных состояниях заболевания. Параметры перехода из одного состояния в другое зависят от возрастной группы агента. Агенты старшего возраста более уязвимы.

Шанс быть протестированным на COVID-19  $\tilde{p} = \frac{p_{sym}}{p_{asym}}$ , зависит от эпидемиологического статуса агента.

$p_{sym}$  — вероятность тестирования для больных с симптомами,

$p_{asym}$  — вероятность тестирования для больных без симптомов.

Параметр  $\tilde{p}$  восстанавливается в ходе решения обратной задачи.

Положительный результат теста могут получить агенты, статус которых обведен в оранжевую рамку на схеме.

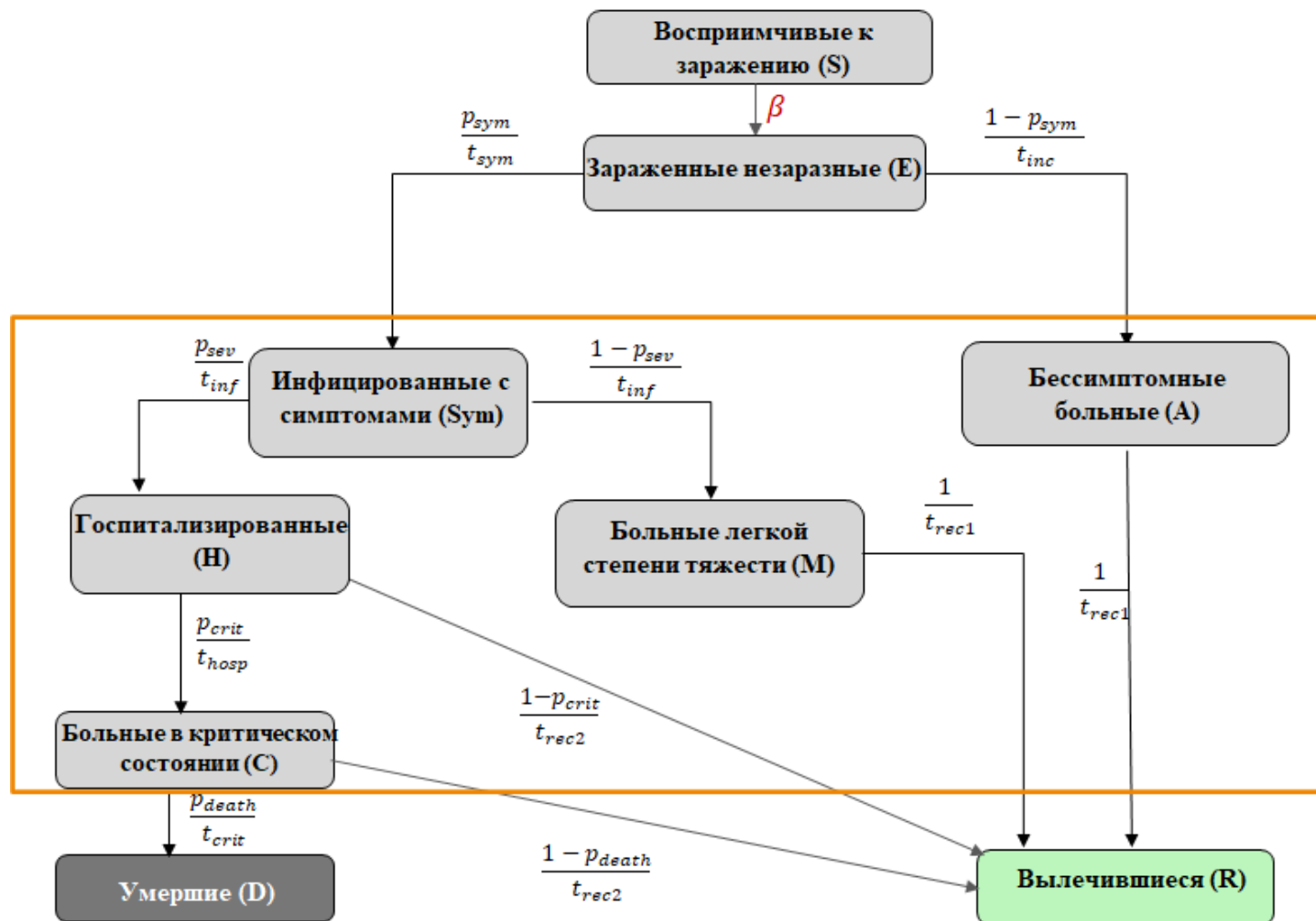


Диаграмма состояний агентов в модели Covasim. Оранжевой рамкой обозначены те состояния, находясь в которых агент имеет возможность получить положительный тест на COVID-19.

# Решение обратной задачи - минимизация функционала

$$J(q) = \sum_{k=1}^K \sum_s w_s \frac{|c_d^{i,s} - c_m^{i,s}|}{\max_t c_d^{s,t}} \rightarrow \min_q$$

**Алгоритм оптимизации:** OPTUNA hyperparameter optimization framework <https://optuna.org/>

В основе лежит метод древовидных оценок Парзена\*.

В алгоритме используются:

- эволюционные методы (генетический алгоритм, дифференциальной эволюции),
- градиентные методы (квазиньютоновские, стохастические),
- метод тензорной оптимизации,
- методы случайного поиска.

$q = (E(0), \beta, \beta_d, \beta_c, t_{sym})$  – вектор неизвестных параметров для каждого участка моделирования,  
 $\beta_d$  - день измерения параметра  $\beta$ ,  
 $\beta_c$  - значение, на которое изменится параметр  $\beta$ ,  
 $t_{sym}$  - параметр уровня тестирования.

$s$  – статистики, по которым наблюдаются данные (количество диагностированных, протестированных, умерших),

$c_d^{i,s}$  - **реальные данные**,

$c_m^{i,s}$  - значения модели,

$w_s$  - весовой параметр для каждой статистики.

Методы глобальной  
оптимизации



Градиентные  
(локальные) методы



$$q^* = \operatorname{argmin}_{q \in Q} J(q)$$

\* Parzen E. On estimation of a probability density function and mode, *Ann. Math. Stat.*, **33**, 1065-1076 (1962).

# Моделирование распространения ежедневно выявленных случаев COVID-19 в Новосибирской области с 12.03.2020 по 30.11.2021 (расчеты проведены 16.10.2021)



**Красная линия** - агентная модель,  
**синяя линия** - SEIR-HCD модель,  
**зеленая линия** – ежедневно выявленные случаи с 12.03.2020 по 16.10.2021.

Прогноз сделан на 40 дней с 17.10 по 26.11 (<http://covid19-modeling.ru>) при сохранении карантинных мер.

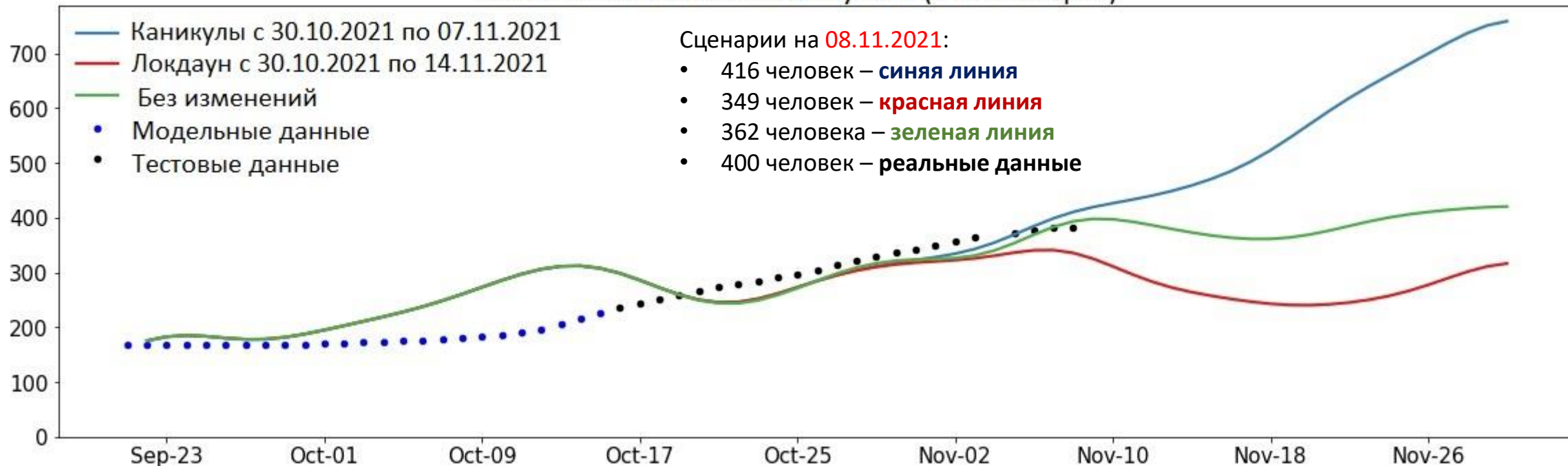
Сравнение прогноза с реальными данными на 08.11.2021:

**данные** – 400 человек, **агентная модель** – 362 человека, **SEIR-HCD модель** - 387 человек.



# Сценарии распространения ежедневно выявленных случаев COVID-19 в Новосибирской области с 17.10.2021 по 30.11.2021

Количество выявленных случаев (Новосибирск)



**Синяя линия** – объявить нерабочие дни с 30.10 по 07.11 (в течение которых уменьшается на 40% людей на работе и учебе, потом увеличивается заболеваемость из-за привезенных случаев в 2 раза).

**Красная линия** – устроить локдаун на 2 недели до 07.11 (полностью закрыть школы, 50% общественных мест и 50% рабочих на перевести на удаленную работу).

**Зеленая линия** – базовый сценарий развития на дату 17.10.2021 с учетом уменьшения количества людей в общественных местах на 40% с 25.10.2021.

**Синие точки** - реальные данные выявленных случаев по 17.10.2021, используемые в моделировании.

**Черные точки** – реальные данные выявленных случаев с 17.10.2021 по 08.11.2021 ([www.стопкоронавирус.рф](http://www.стопкоронавирус.рф)).

# Mean field games – объединение двух подходов моделирования

Для больших однородных и хорошо перемешанных популяций SIR-модели можно интерпретировать как приближение среднего поля вероятностной модели клеточного автомата.



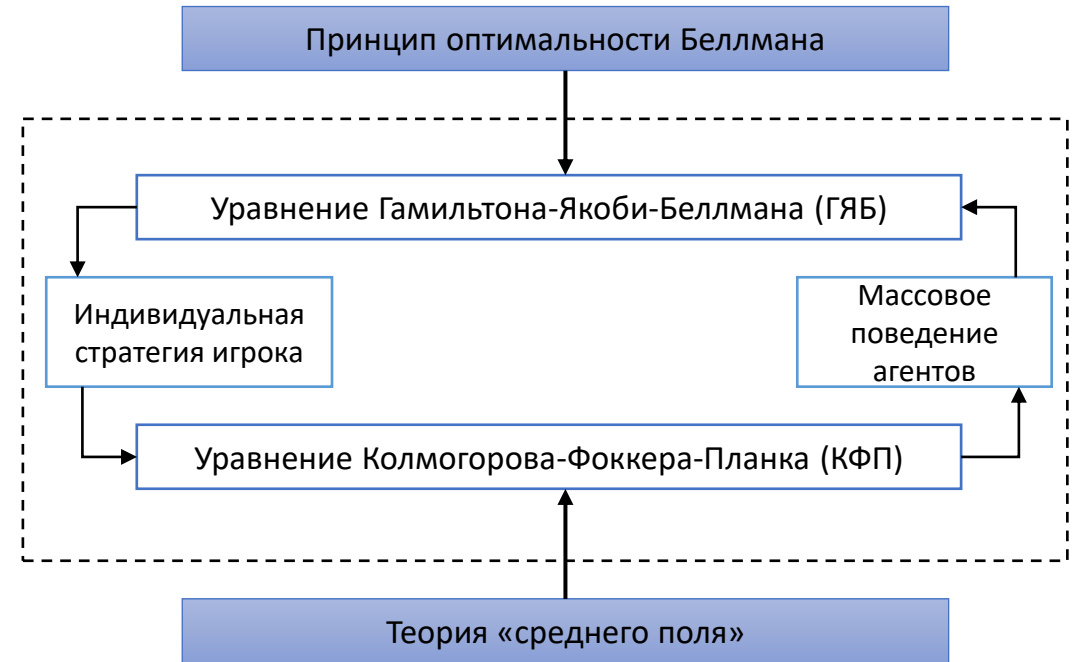
$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N}, & S(0) = N - I_0, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I, & I(0) = I_0 < N, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I, & R(0) = 0. \end{cases}$$

КФП

Введем плотность распределения агентов  $m_i: [0, T] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $i \in \{S, I, R\}$ ,  $x \in [0, 1]$  обозначает склонность населения соблюдать карантинные меры (0 – агент склонен соблюдать ограничения, 1 – не склонен).

$$\begin{cases} \frac{\partial m_S}{\partial t} + \nabla(m_S \alpha_S) + \frac{\beta m_I m_S}{N} - \frac{\sigma_S^2 \Delta m_S}{2} = 0, & m_S(0, x) = m_{S0}(x), \\ \frac{\partial m_I}{\partial t} + \nabla(m_I \alpha_I) - \frac{\beta m_I m_S}{N} + \gamma m_I - \frac{\sigma_I^2 \Delta m_I}{2} = 0, & m_I(0, x) = m_{I0}(x), \\ \frac{\partial m_R}{\partial t} + \nabla(m_R \alpha_R) - \gamma m_I - \frac{\sigma_R^2 \Delta m_R}{2} = 0, & m_R(0, x) = m_{R0}(x). \end{cases}$$

$$\frac{\partial m_i}{\partial x} = 0, x = 0, 1.$$



H. Tembine. COVID-19: Data-Driven Mean-Field-Type Game Perspective. Games. 11, 51 (2020).

$$\begin{cases} \frac{\partial m_S}{\partial t} + \nabla(m_S \alpha_S) + \frac{\beta m_I m_S}{N} - \frac{\sigma_S^2 \Delta m_S}{2} = 0, & m_S(0, x) = m_{S0}(x), \\ \frac{\partial m_I}{\partial t} + \nabla(m_I \alpha_I) - \frac{\beta m_I m_S}{N} + \gamma m_I - \frac{\sigma_I^2 \Delta m_I}{2} = 0, & m_I(0, x) = m_{I0}(x), \\ \frac{\partial m_R}{\partial t} + \nabla(m_R \alpha_R) - \gamma m_I - \frac{\sigma_R^2 \Delta m_R}{2} = 0, & m_R(0, x) = m_{R0}(x). \end{cases}$$

$$\frac{\partial m_i}{\partial x} = 0, x = 0, 1.$$

КФП

В предположении рациональности агентов набор стратегий  $\alpha_i(t, x)$  доставляет минимум функционалу

$$J(m_{SIR}, \alpha_{SIR}) = \int_0^T \int_0^1 \sum_{i \in \{S, I, R\}} (F_i(\alpha_{SIR}, t, x) m_i + g_i(t, x, m_{SIR})) dx dt + \int_0^1 \frac{m_I^2(T, x)}{2} dx$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_S}{\partial t} + \frac{\sigma_S^2 \Delta v_S}{2} + \alpha_S \frac{\partial v_S}{\partial x} + \beta m_I (v_I - v_S) = -F_S - \frac{\partial g_S}{\partial m_S}, \\ \frac{\partial v_I}{\partial t} + \frac{\sigma_I^2 \Delta v_I}{2} + \alpha_I \frac{\partial v_I}{\partial x} + \beta m_S (v_I - v_S) - \gamma v_I = -F_I - \frac{\partial g_I}{\partial m_I} - \delta(T - t) m_I, \\ \frac{\partial v_R}{\partial t} + \frac{\sigma_R^2 \Delta v_R}{2} + \alpha_R \frac{\partial v_R}{\partial x} = -F_R - \frac{\partial g_R}{\partial m_R}. \end{cases}$$

ГЯБ

$$v_i(T, x) = 0,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = 0, x = 0, 1.$$

# Модель SIRC

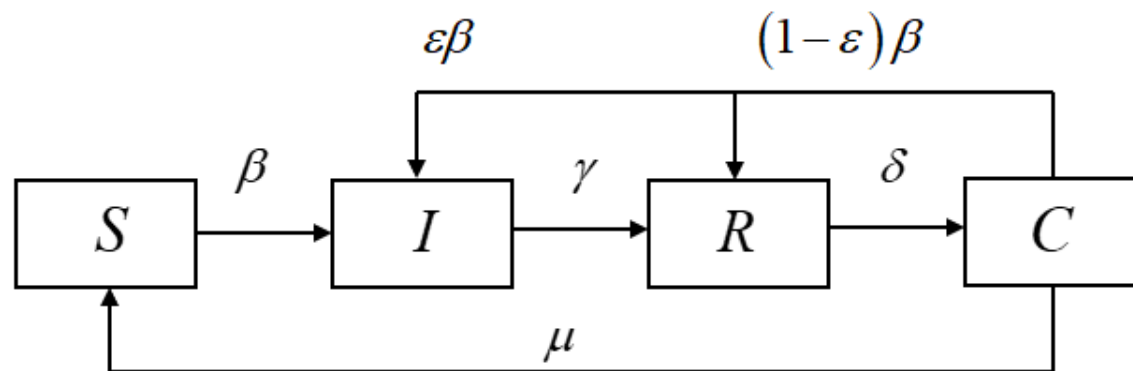
$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + \mu C, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI + \varepsilon\beta CI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = (1 - \varepsilon)\beta CI + \gamma I - \delta R, \\ \frac{dC}{dt} = \delta R - \beta CI - \mu C, \end{cases}$$

S - восприимчивые

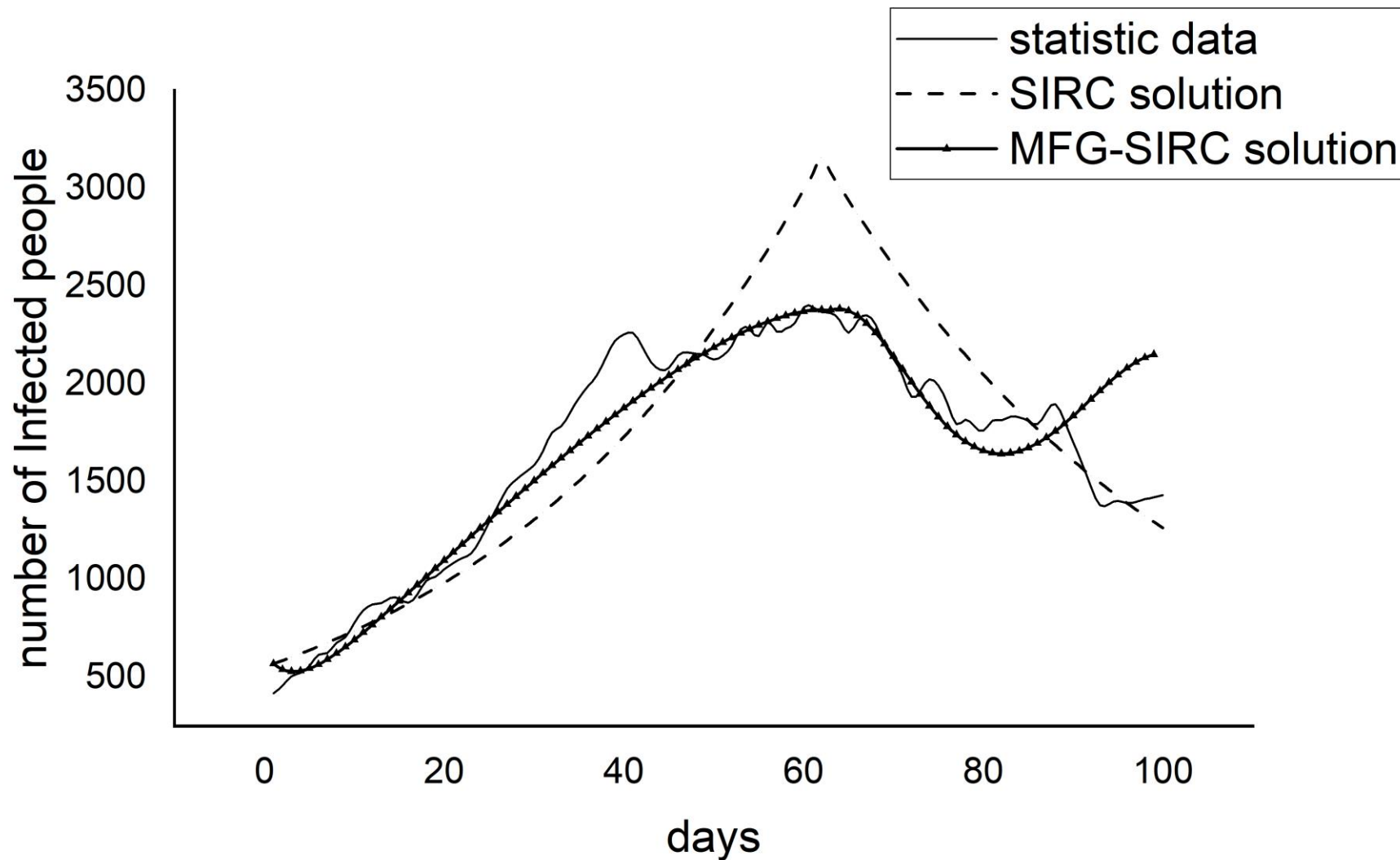
I – симптомные  
инфицированные

R - вылеченные

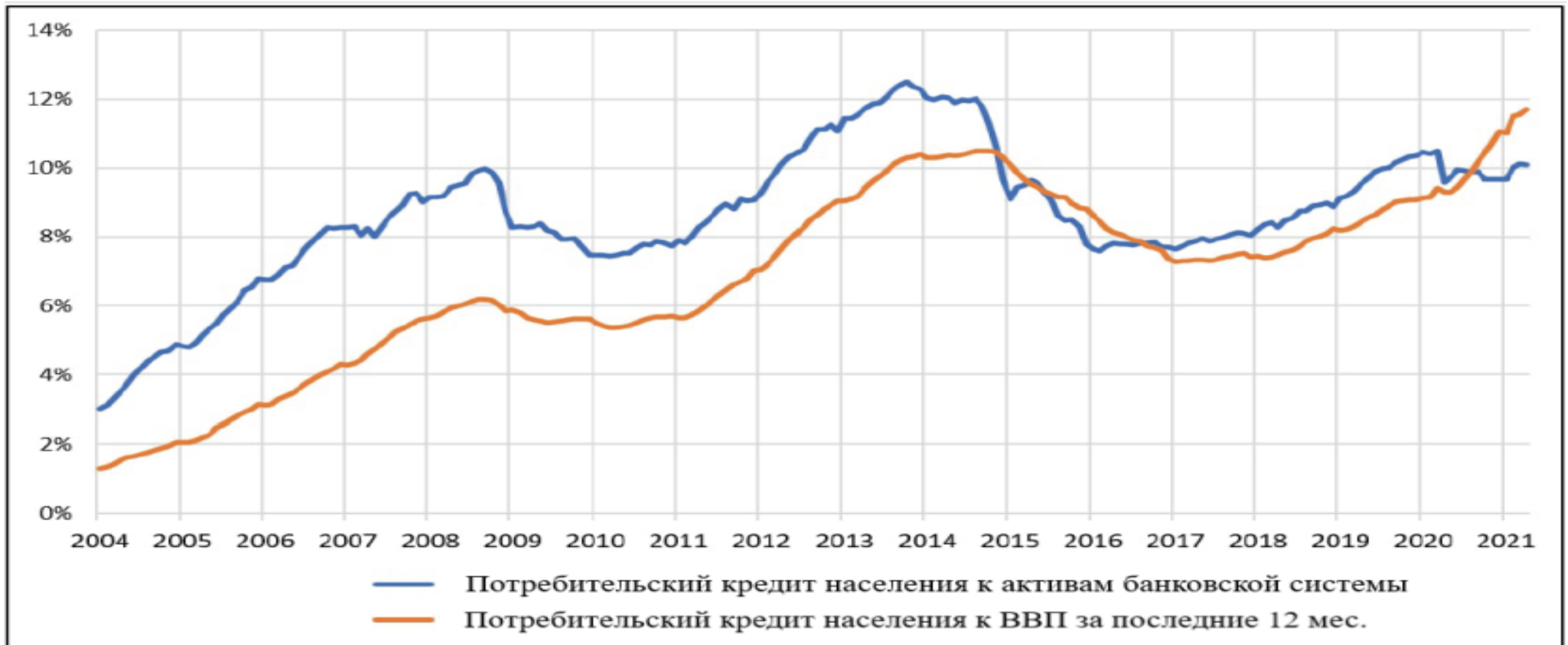
C – инфицированные  
другими штаммами





# Сравнение результатов прогноза числа инфицированного населения для моделей SIRC и SIRC-MFG со статистическими данными в течение ста дней с 1 мая 2020 г. в г. Новосибирске



## Рост задолженности населения по потребительскому кредиту к ВВП

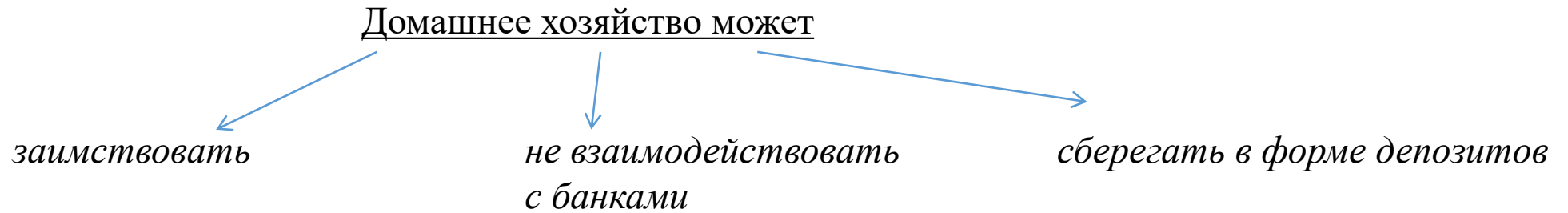


 М.В. Тарасенко, Н.В. Трусов, А.А. Шананин. Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2021, Т.61, №6. С.1034-1056.

 A.A. Shananin, N.V. Trusov. The household behaviour modelling based on Mean Field Games approach. Lobachevskii Journal of Mathematics, V.42, №7, P.1738-1752.

## Модель репрезентативного рационального домашнего хозяйства

- Представлена задача оптимального управления рамсеевского типа, описывающая поведение репрезентативного домашнего хозяйства, максимизирующего дисконтированное потребление.



- **Особенности задачи:**

- несовершенный рынок (ставки по кредитам намного больше ставок по депозитам);
- возможности кредитования приводят к угрозе возникновения финансовой пирамиды. Получено условие существования решения задачи оптимального управления, т.е. отсутствие финансовой пирамиды.

- С помощью принципа максимума Понтрягина в форме Кларка **выделены три режима поведения домашних хозяйств** (заимствование, не взаимодействие с банками, сбережения).

- **Переходы между режимами зависят от соотношений**

- показателей экономической конъюнктуры: ставки по кредитам и депозитам физическим лицам; темп роста доходов; инфляция.

- поведенческих характеристик репрезентативного домашнего хозяйства: скорость обращения денег; отвращение к риску; коэффициент дисконтирования.

- Построен **синтез оптимального управления**, который позволяет выделить в зависимости от соотношения экономической конъюнктуры и поведенческих параметров типы поведения домашних хозяйств характерные для различных социальных слоёв.

# Модель поведения репрезентативного рационального домашнего хозяйства.

## Постановка задачи

Доходы  $S$  являются стохастическим процессом и описываются СДУ

$$dS = S(\gamma dt + \sigma_0 dW),$$
$$S(t_0) = s_0.$$

Условие платёжеспособности заёмщика:  $x(t) > -\frac{S(t)}{r_L - \gamma}.$

**Задача оптимального управления:**

$$\mathbb{E} \left( \int_{t_0}^{+\infty} M^\alpha e^{-\delta(t-t_0)} dt \right) \rightarrow \max_{M \geq 0},$$

$$\frac{dx}{dt} = S - \frac{1}{\theta} M + r_D (x - M)_+ - r_L (M - x)_+,$$

Если  $x(t) \leq -\frac{S(t)}{r_L - \gamma}$ , то  $M(t) = 0$ ,

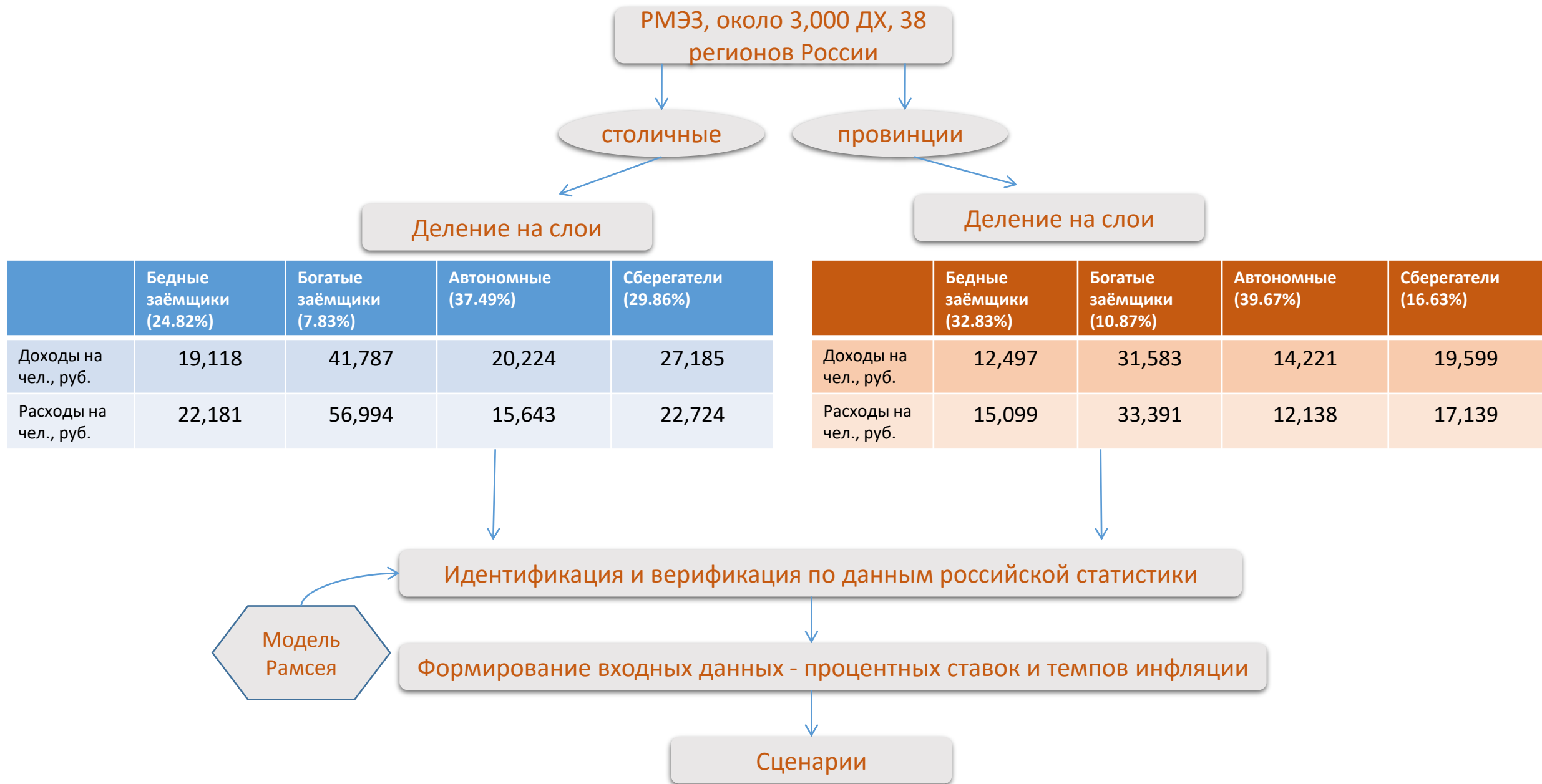
$$dS = S(\gamma dt + \sigma_0 dW),$$

$$x(t_0) = x_0,$$

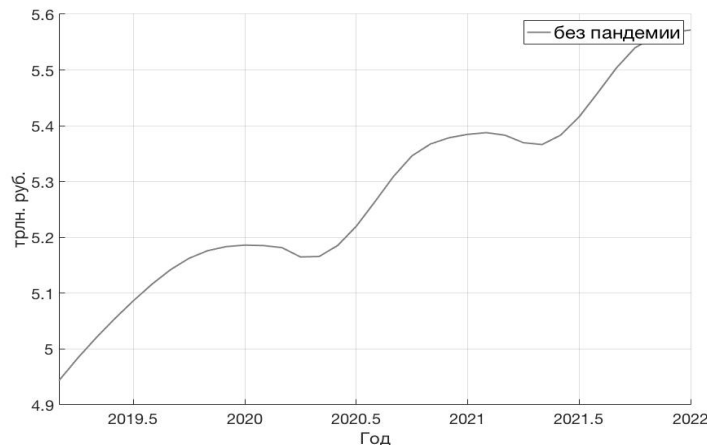
$$S(t_0) = s_0.$$



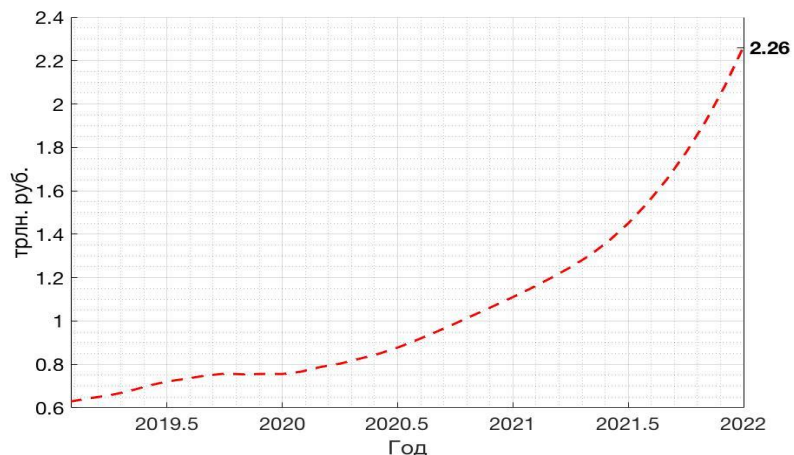
# Использование модели для анализа состояния рынка потребительского кредита



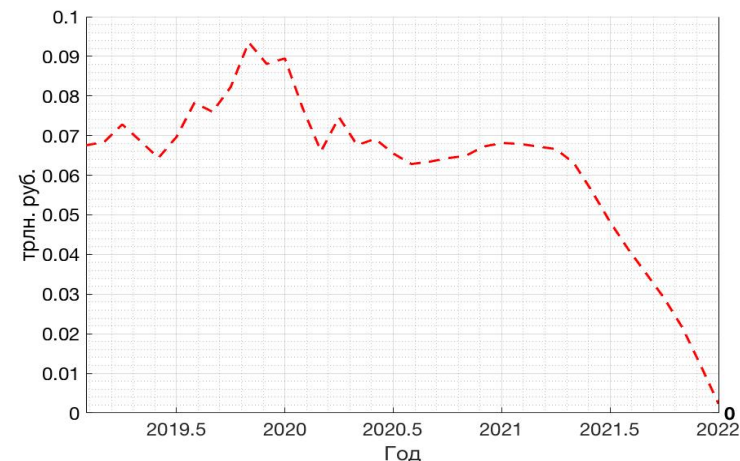
# Сценарий отсутствия пандемии COVID-19



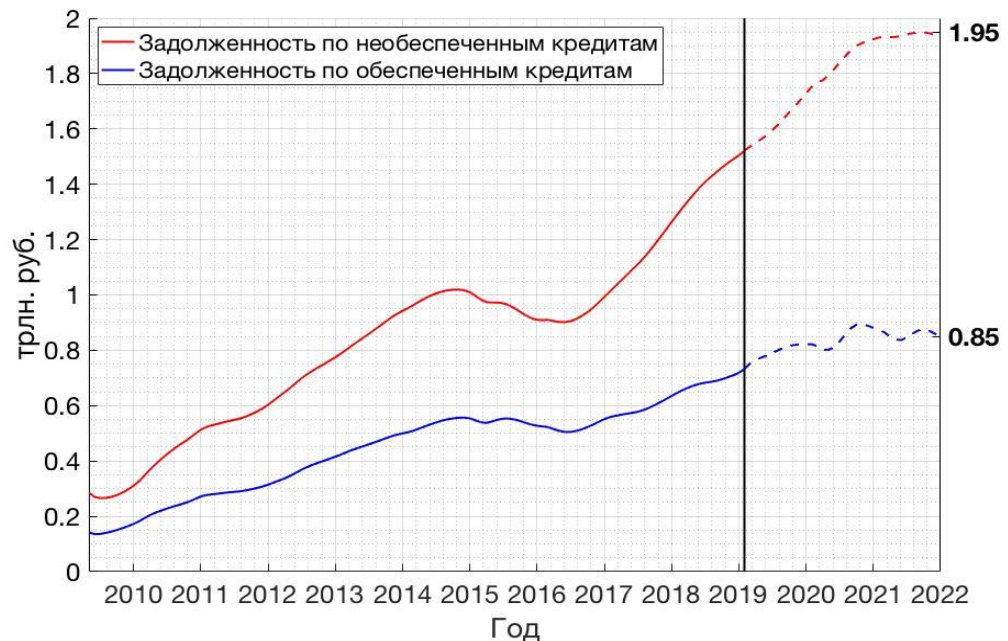
**Доходы населения**



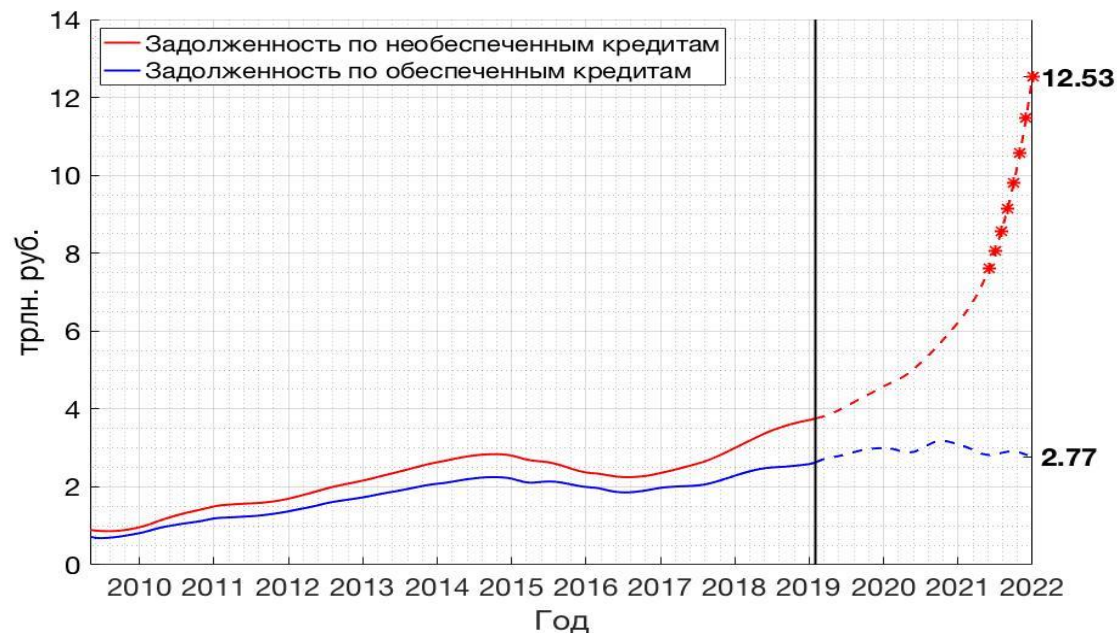
**Просроченная задолженность**



**Ежемесячные доходы банков**

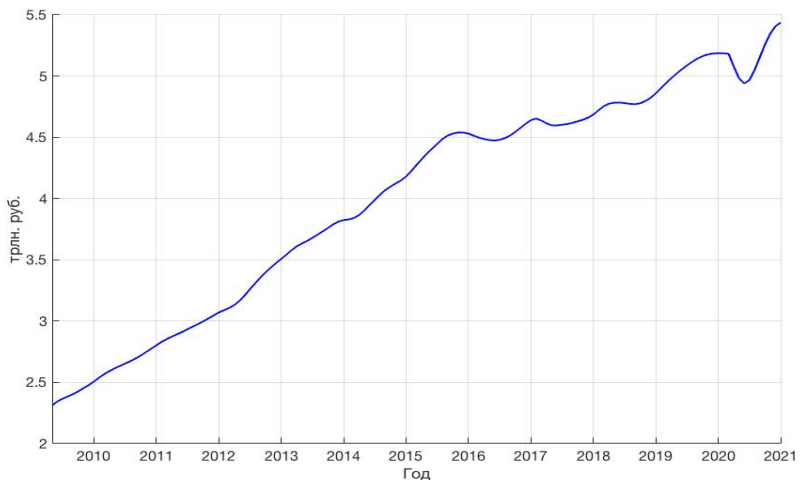


**Столичная группа регионов. Задолженности.**

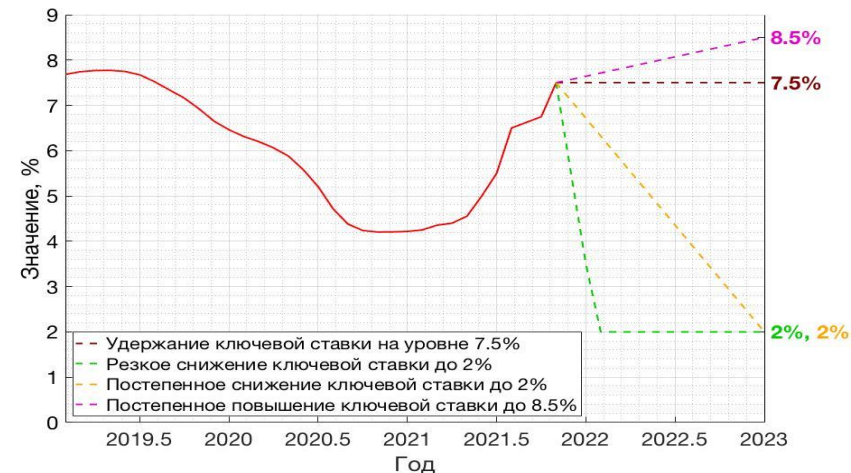


**Провинциальная группа регионов. Разорение домохозяйств с необеспеченными кредитами.**

# Пандемия. Анализ влияния ключевой ставки ЦБ.



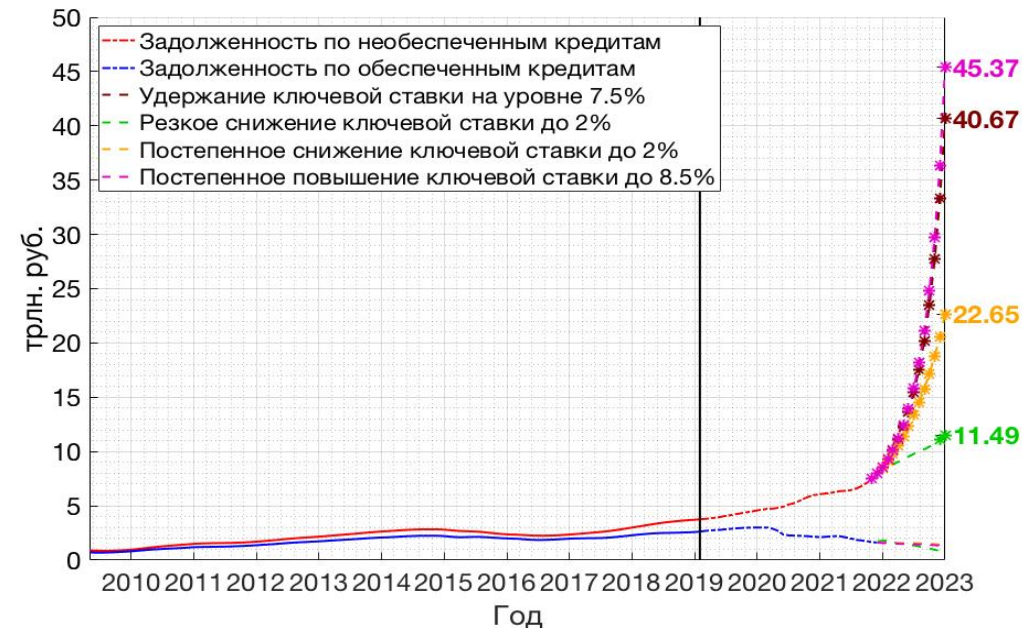
**Доходы населения**



**Сценарии управления ключевой ставкой ЦБ РФ**



**Столичная группа регионов. Рост задолженности домохозяйств с необеспеченными кредитами.**



**Провинциальная группа регионов. Взрывной рост задолженности и разорение домохозяйств с необеспеченными кредитами.**



# Моделирование группового поведения домохозяйств

## Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\text{Если } x > -\frac{S}{r_L - \gamma} : \quad \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial t} + \gamma S \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial S} + \frac{\sigma_0^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 u(x, S, t)}{\partial S^2} + \\ + \max_{M \geq 0} \left\{ M^\alpha e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial x} \left( S - \frac{1}{\theta} M + r_D (x - M)_+ - r_L (M - x)_+ \right) \right\} = 0.$$

$$\text{Если } x \leq -\frac{S}{r_L - \gamma} : \quad \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial t} + \gamma S \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial S} + \frac{\sigma_0^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 u(x, S, t)}{\partial S^2} + \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial x} (S + r_D (x)_+ - r_L (-x)_+) = 0.$$

Условие на правом конце временного интервала:  $u(x, S, T) = \psi(x, S, T)$ .

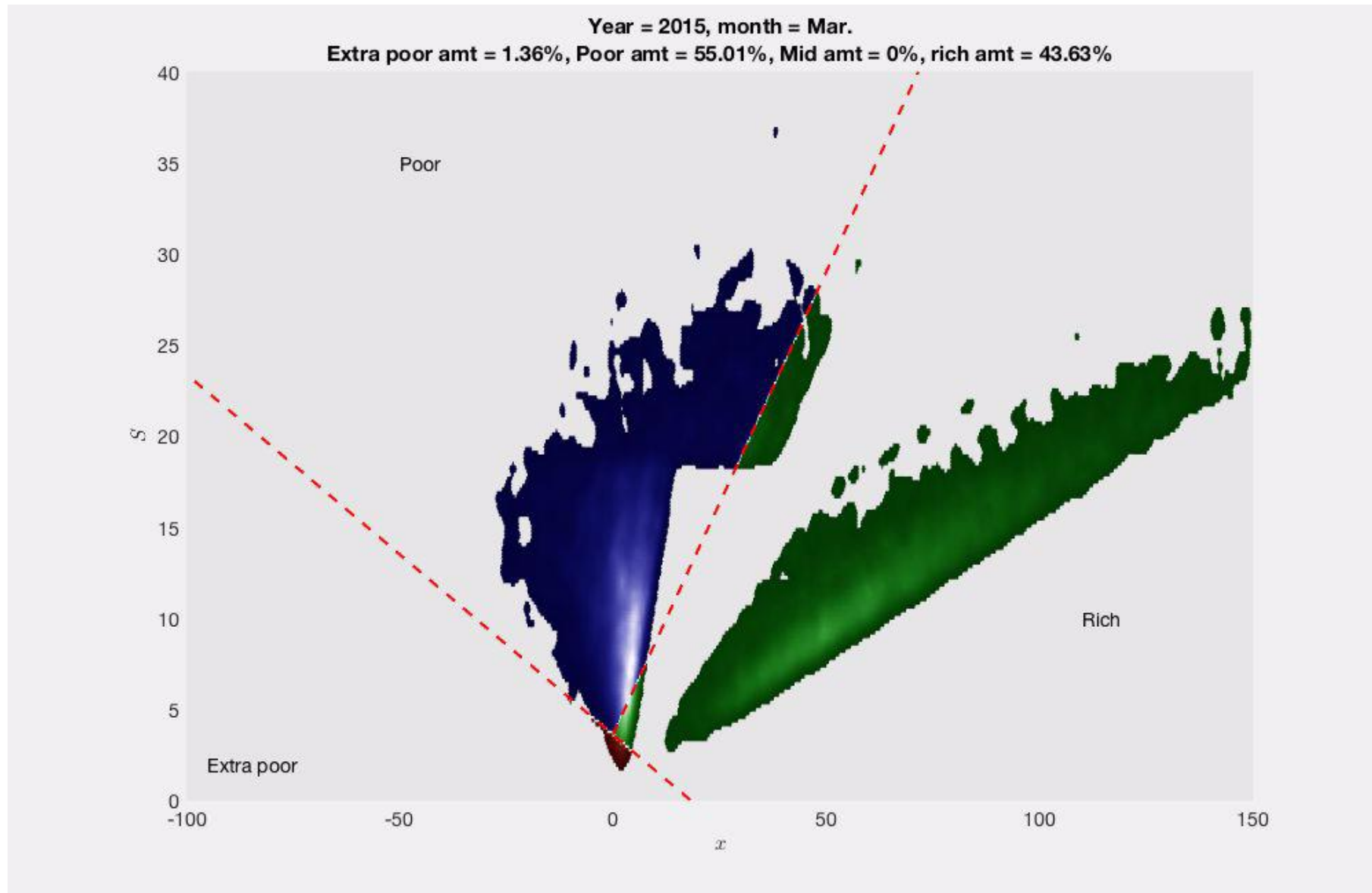
## Уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка

$$\frac{\partial m(x, S, t)}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (S^2 m(x, S, t)) + \gamma \frac{\partial}{\partial S} (S m(x, S, t)) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( m(x, S, t) \left( S - \frac{1}{\theta} M(x, S) + r_D (x - M(x, S))_+ - r_L (M(x, S) - x)_+ \right) \right) = 0.$$

Начальное условие:  $m(x, S, t_0) = m_{t_0}(x, S)$ .

# Групповое поведение домашних хозяйств на основе концепции игр среднего поля

## Удержание ключевой ставки на уровне 7.5%



Спасибо за внимание!