

**РАЗРАБОТКА ВЫСОКОТОЧНЫХ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ  
ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ.  
ПРОЕКТ № 189**

**Координаторы:** д-р физ.-мат. наук Шапеев В. П., д-р физ.-мат. наук Короткий А. И.  
**Исполнители:** ИТПМ СО РАН, ИММ УрО РАН, ИАиПУ ДВО РАН

Созданы варианты метода коллокаций и наименьших квадратов (КНК) решения сложных краевых задач для двумерных стационарного и нестационарного уравнений теплопроводности в области с криволинейными внешней и внутренними границами (между фазами вещества). При этом положение внутренних границ, на которых ставятся условия теплового баланса, неизвестно и определяется вместе с решением задач. На внешних границах ставятся условия Дирихле и условия с нелинейными дифференциальными операторами.

Предложенные варианты метода КНК были реализованы в виде компьютерных программ и использованы для моделирования сложной задачи о лазерной сварке металлических пластин при наличии в расчетной области криволинейного пароголового канала и трех фаз металла: жидкой, двухфазной в зоне затвердевания и твердой. Ввиду важности решаемой задачи также была создана численная модель сварки пластин на основе метода установления с конечно-разностной аппроксимацией дифференциальных уравнений. Проведено сравнение результатов численного моделирования по обоим методам. На последовательности сеток установлены сходимость численного решения и хорошее совпадение результатов по обоим численным методам.

Впервые построены новые явные и неявные двухслойные схемы восьмого и шестого порядков аппроксимации по пространственной переменной и четвертого и третьего порядков по временной переменной, соответственно, решения краевых задач для линейного уравнения теплопроводности. В численных экспериментах с гладкими входными данными задачи на последовательности сеток установлены вы-

сокий, соответствующий порядку аппроксимации, порядок сходимости разностного решения и преимущества новых схем по сравнению с существующими.

Предложен новый подход к моделированию вязкости в методе дискретных вихрей, основанный на коррекции инвариантов течения идеальной несжимаемой жидкости. Величина коррекции соответствует заданной вязкости. На основе этого подхода разработан численный алгоритм для исследования двумерных течений вязкой жидкости и проведено моделирование ряда течений. Достоверность расчетов подтверждена сравнением с теорией и известными экспериментальными данными.

Для двумерных нестационарных уравнений Навье—Стокса динамики вязкого теплопроводного совершенного газа с политропным уравнением состояния впервые построены все частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 1 с однородной деформацией. Доказано, что все такие решения либо редуцируются к инвариантным, либо восстанавливаются из решения уравнения Пуассона. При этом начально-краевые задачи для уравнений Навье—Стокса легко переписываются в краевую задачу для уравнения Пуассона, численное решение которого находится с точностью, близкой к погрешности округлений на ЭВМ на сетках с числом узлов порядка ста.

Впервые для двумерных стационарных уравнений Навье—Стокса динамики вязкого теплопроводного совершенного газа с политропным уравнением состояния построены все регулярные дифференциально инвариантные решения. Для каждой допускаемой подалгебры найдены базис дифференциальных инвариантов и операторы инвариантного дифференци-

рования. Доказано, что базис дифференциальных инвариантов содержится среди инвариантов порядка не выше первого. Показано, что часть построенных решений редуцируется к инвариантным решениям. Построены также

примеры нерегулярных дифференциально инвариантных решений. Среди них получены как редуцируемые, так и не редуцируемые к инвариантным решения. Среди последних все решения являются новыми.

### Основные публикации

1. *Meleshko S. V.* Methods for Constructing Exact Solutions of Partial Differential Equations: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering. Springer, 2005. 352 p.
2. *Шанеев В. П.* Неявная разностная схема с погрешностью аппроксимации  $O(\tau^4, h^8)$  для уравнения теплопроводности // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9, № 5. С. 114—122.
3. *Ibragimov N. H., Meleshko S. V.* Linearization of third-order ordinary differential equations by point transformations // J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 308. P. 266—289.
4. *Meleshko S. V.* A particular class of partially invariant solutions of the Navier—Stokes equations // Nonlinear Dynamics. 2004. V. 36. P. 47—68.
5. *Hematulin A., Meleshko S. V.* A new approach related with group analysis and hodograph type transformation for constructing exact solutions // Mathematics and Computers in Simulation. 2005. V. 69. P. 282—289.
6. *Ibragimov N. H., Meleshko S. V.* Linearization of third-order ordinary differential equations // Archives of ALGA. 2004. V. 1. P. 71—92.
7. *Semin L., Shapeev V.* Constructing the numerical method for Navier—Stokes equations using computer algebra system // Lecture Notes in Computer Science. 2005. V. 3718. P. 367—378.