



Обратные задачи математической физики

С.И. Кабанихин,

М.А. Шишленин, И.М. Куликов, А.В. Пененко, О.И. Криворотько, И.Г. Черных.

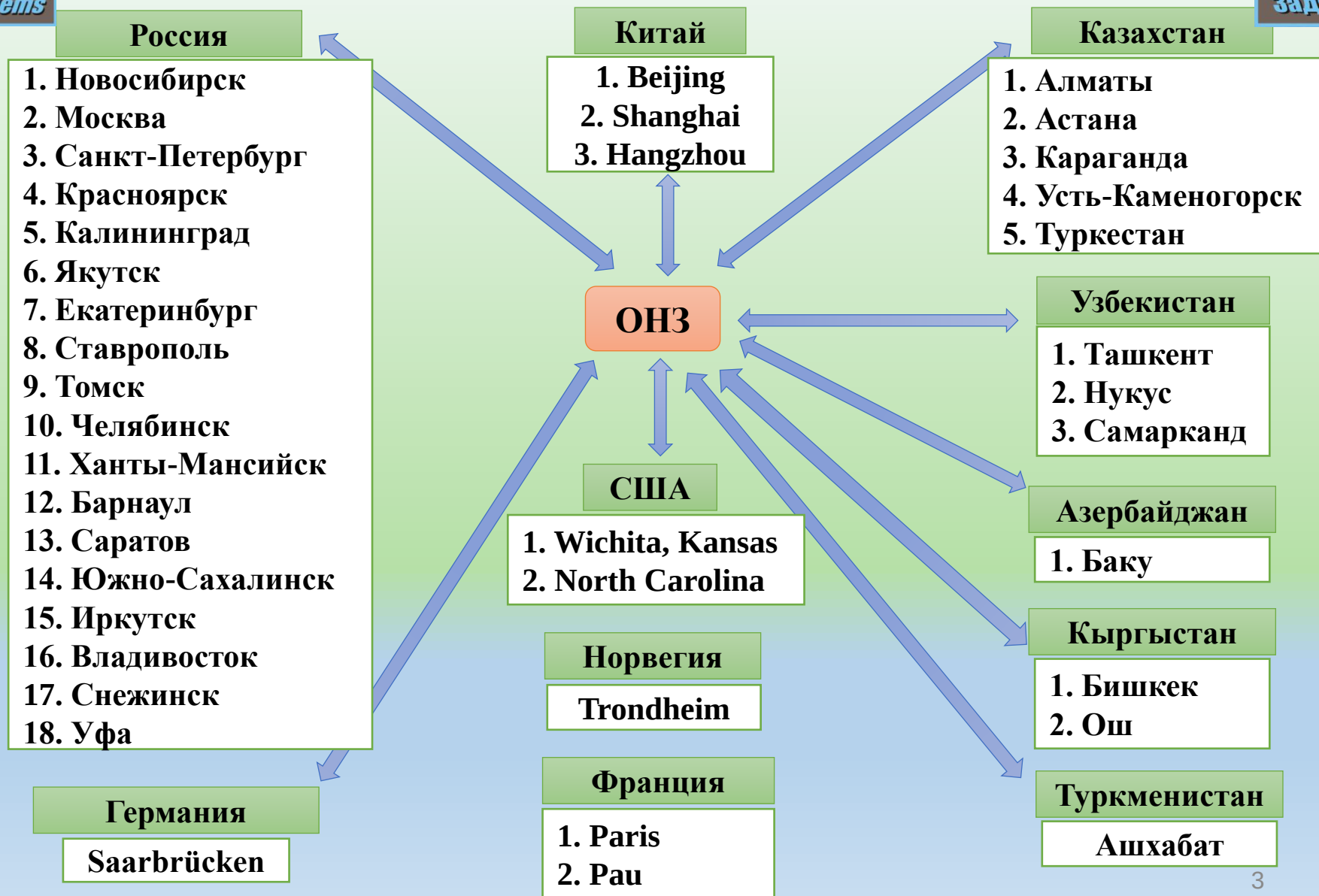
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

(ВЦ СО АН СССР, основанный Г.И. Марчуком)





Международная молодежная научная школа-конференция Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач



10 основных пользователей ЦКП ССКЦ ИВМиМГ СО РАН





ЦКП

Hard

Softw

ИК СО РАН:

- дизайн наноматериалов
- разработка высокопроизводительных каталитических систем
- квантово-химические исследования структуры катализаторов

ИХТТМ СО РАН:

- синтез нанокompозитных материалов и гетероструктур для ионики
- образование солей и со- кристаллов органических соединений

ИХКиГ СО РАН:

- квантово-химическое исследование свойств молекулярных систем

ИЦиГ СО РАН:

- анализ SNP в промоторах генов (онкозаболевания)
- биоинформационный анализ транскриптомных данных

ИТ СО РАН:

- исследование процессов переноса в энергохимических аппаратах
- спиральные вихревые структуры в круглых струях
- тепломассоперенос с фазовыми переходами

ИВМиМГ СО РАН:

- моделирование электрофизических процессов и устройств
- предсказательное моделирование процессов в нефтегазовой отрасли
- со-дизайн программного обеспечения экзафлопсных суперЭВМ

АУ:

и

1:



КАБАНИХИН Сергей Игоревич

**Директор Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор,
лауреат премии Евразийской ассоциации обратных задач (2016).**

Journal of Inverse and Ill-Posed Problems

Главный редактор

Impact-factor Web-of-Science 0.98

Сибирский журнал вычислительной математики

Главный редактор

Web of Science и Scopus

Со-председатель международного программного комитета конференции

***Inverse Problems: Modeling and Simulation* (2004 - 2016),**

и

ежегодной международной молодежной школы-конференции

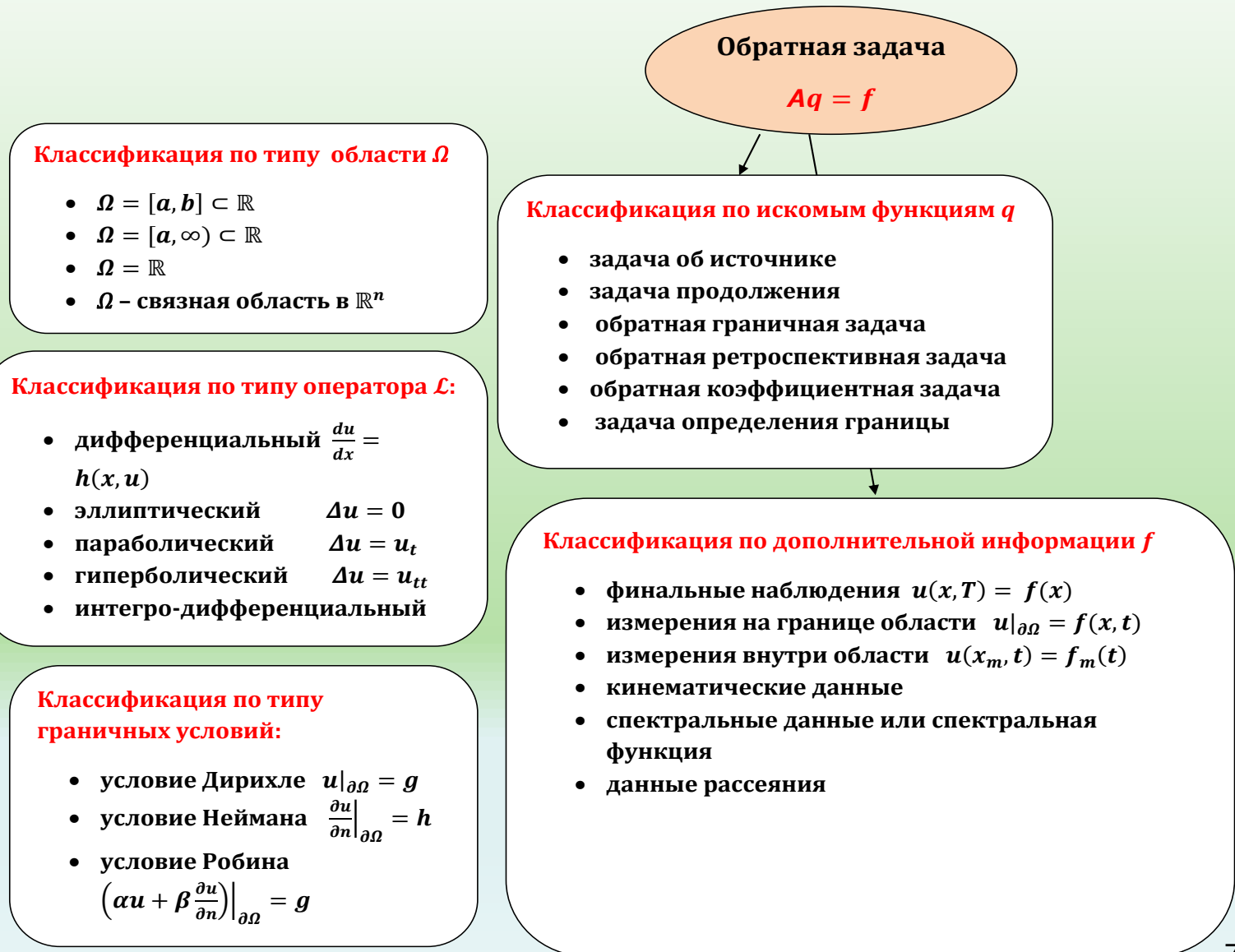
***Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач*
(2009-2017)**

Заведующий кафедрой математических методов геофизики мехмата НГУ.

Ученики: докторов наук 9, кандидатов 19, PhD 4.

Опубликовано 12 книг (из них 4 за рубежом) и более 150 научных работ.

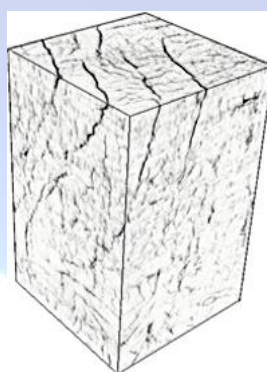
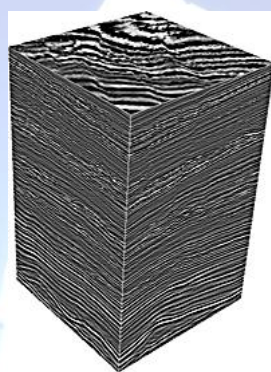
Обратные задачи



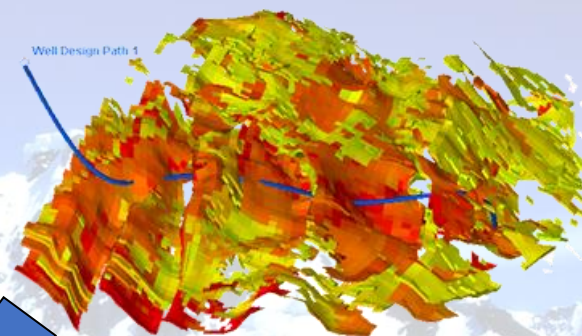
Этапы использования математических методов при обработке сейсмических данных



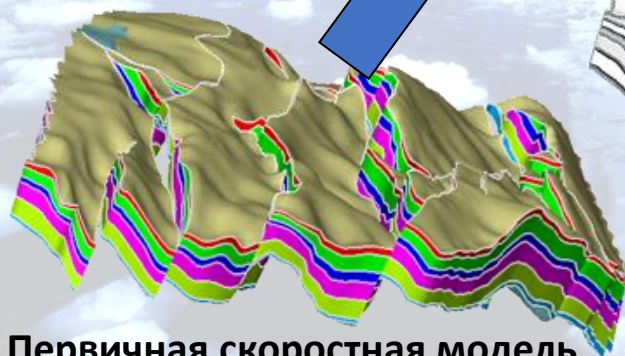
Сейсмические данные



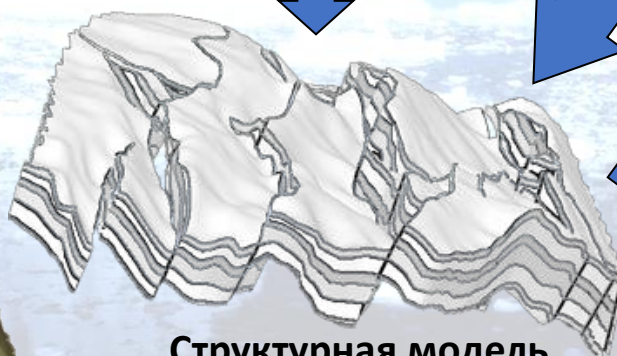
Деконволюция. Фильтрация



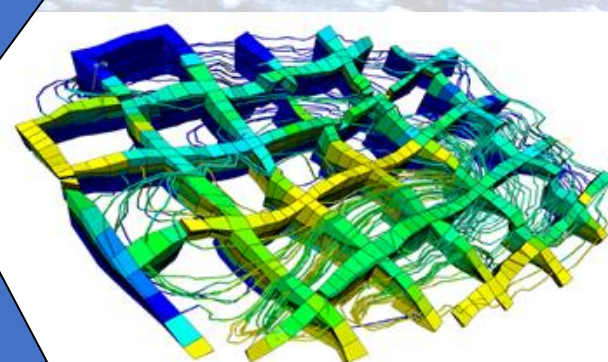
Бурение и коррекция



Первичная скоростная модель



Структурная модель



Моделирование нефтяного резервуара



Уильям Генри Пíкеринг
(William Henry Pickering, 1858-1938).
Американский астроном и математик,
сотрудник Персиваля Лоуэлла.
Профессор Гарвардского университета.

- С 1919 г. занялся поисками девятой планеты Солнечной системы, основываясь на возмущениях орбит Урана и Нептуна. Пользовался результатами наблюдений, выполненных на обсерватории Маунт-Уилсон, но планеты так и не обнаружил. (В 1930 г. выяснилось, что слабое изображение Плутона на фотографиях 1918 г. было закрыто воздушным пузырьком в фотоэмульсии.)

Загадка 1. Открытие Плутона – случайность или закономерность?

В 1915 году американский астроном Персеваль Ловелл вычислил орбиту «планеты Икс», которая по его расчётам слегка возмущала движение Урана и Нептуна.

В 1930 году Клайд Томбо открыл планету Плутон.



Персеваль Ловелл
(1855–1916)



Снимок Плутона
с Земли



Клайд Томбо
(1906–1997)

- [Персеваль Лоуэлл](#) (1855–1916), Клайд Томбо (1906–1997)/
- В 1915 году американский астроном Персеваль Ловелл вычислил орбиту «планеты Икс», которая по его расчётам слегка возмущала движение Урана и Нептуна. В 1930 году Клайд Томбо открыл планету Плутон.

Основы теории и приложений обратных задач
заложены советскими математиками.

В.А. Амбарцумян (1929). Однородная струна единственным образом определяется множеством собственных частот.

Теорема. Пусть собственные числа краевой задачи

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, x \in (0, \pi), \\ y'(0) &= y'(\pi) = 0 \end{aligned}$$

равны n^2 . Тогда $q(x) = 0$.

Следующая публикация по обратным задачам Штурма-Лиувилля появилась только через 15 лет.

Heisenberg W. Die beobachtbaren Grossen in der Theorie der Elementarteilchen. *Zeitschrift für Physik*, 1943, vol. 120, n. 7, pp. 513–538.

В.А. Амбарцумян заметил по этому поводу: “Когда астроном публикует математическую работу в физическом журнале, нельзя ожидать, что она привлечет множество читателей”.

- И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан, М.Г. Крейн, М.А. Марченко - спектральные обратные задачи и обратные задачи рассеяния.
- В.Е. Захаров, А.Б. Шабат – нелинейное уравнение Шредингера.
- Л.Д. Фаддеев – трехмерная обратная задача теории рассеяния для уравнения Шрёдингера.
- А.Н. Тихонов, В.К. Иванов, М.М. Лаврентьев – обратные и некорректные задачи.
- Ю.С. Осипов - устойчивые решения обратных задач динамики управляемых систем.
- С.П. Новиков - теория интегрируемых систем и теория солитонов.
- [Г.И. Марчук](#) – обратные задачи теории переноса.



Editor-in-Chief [Sergey Kabanikhin](#)

Managing Editor Maxim Shishlenin

IMPACT FACTOR increased in 2015: **0.987**

Rank 59 out of 312 (Q1) in category Mathematics

and

93 out of 254 (Q2) in Applied Mathematics

in the 2015 Thomson Reuters Journal Citation Report/Science Edition

SCImago Journal Rank (SJR) 2015: 0.583

Source Normalized Impact per Paper (SNIP) 2015: 1.106

Impact per Publication (IPP) 2015: 0.712

Mathematical Citation Quotient (MCQ) 2015: 0.43

W. Heisenberg (1943). Единственность восстановления $q(x)$ и k по заданной $S(\omega)$.

Функция рассеяния $S(\omega) = \frac{\tilde{g}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)}$,

$\tilde{f}(\omega), \tilde{g}(\omega)$ - образы Фурье функций $f(t)$ и $g(t)$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} - q(x)u, & x > 0, t \in R, \\ u_x(0, t) - ku(0, t) &= f(t), \\ u(0, t) &= g(t). \end{aligned}$$

G. Borg (1946). **Теорема.** Пусть $\{\lambda_n\}$ - собственные числа оператора

$\{\mu_n\}$ - собственные числа оператора

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, x \in [0, \pi] \\ y'(0) - hy(0) &= 0, y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \mu y, x \in [0, \pi] \\ y'(0) - hy(0) &= 0, y'(\pi) + H_1 y(\pi) = 0 \end{aligned}$$

Тогда $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ единственным образом определяют $q(x)$ и константы h, H, H_1 .

N. Levinson (1949). Обратная задача квантовой теории рассеяния. Пусть собственные значения неотрицательны, тогда фаза рассеяния, заданная для всех положительных энергий и любого фиксированного углового момента, определяет потенциал однозначно.

А.С. Алексеев (1962). Обратная задача сейсмического зондирования.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} - q(x)u, & x > 0, t > 0, \\ u &\equiv 0, & t \leq 0 \end{aligned}$$

$$u_x(0, t) - ku(0, t) = f(t)$$

$$u(0, t) = g(t) \quad \xrightarrow{x}$$

$$\tilde{g}(\omega) = P(\omega)\tilde{f}(\omega), \quad r'(\lambda) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} P(\sqrt{\lambda})$$

А.С. Алексеев, В.С. Белоносов (1994). Универсальная формула для спектральной функции.

$$P(\omega) = \frac{e(0, \omega)}{j(-\omega)}, \quad r'(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi |j(\sqrt{\lambda})|^2}, \quad \lambda > 0$$

Следствие. Обратные задачи рассеивания и сейсмического зондирования эквивалентны: отвечающие им переходные функции $S(\omega)$ и $P(\omega)$ выражаются друг через друга при помощи явных формул и преобразования Фурье.

О взаимосвязях переходных функций

Отметим связь между тремя функциями: спектральной функцией $\rho(\lambda)$, функцией Йоста $j(\sqrt{\lambda})$ импульсной характеристикой среды $r(t)$ (след решения прямой задачи $u(0, t) = r(t)$)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} - q(x)u, & x \in (0, \pi), t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, u_t(x, 0) = \delta(t), \\ u_x(0, t) - hu(0, t) &= 0, u_x(\pi, t) + Hu(\pi, t) = 0, \end{aligned}$$

$$f(t) = \int_0^t r(s)g(t-s)ds$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}t)}{\sqrt{\lambda_n}\|y_n\|^2} y_n(x) \quad \rho(\lambda) = \sum_{n:\{\lambda_n < \lambda\}} \frac{\theta(\lambda - \lambda_n)}{\|y_n\|^2}$$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} y(x, \lambda) d\rho(\lambda) \quad r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} d\rho(\lambda) \quad \rho(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi |j(\sqrt{\lambda})|^2}$$

Теорема. А.Н. Тихонов (1949).

Если функция $y(x, \lambda)$ определяется как решение уравнения

$$y'' - \frac{\lambda^2}{\sigma^2} y = 0, \quad y(\infty) = 0,$$

где $\sigma(x)$ - кусочно-аналитическая функция $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$,
то $\sigma(x)$ однозначно определяется значениями

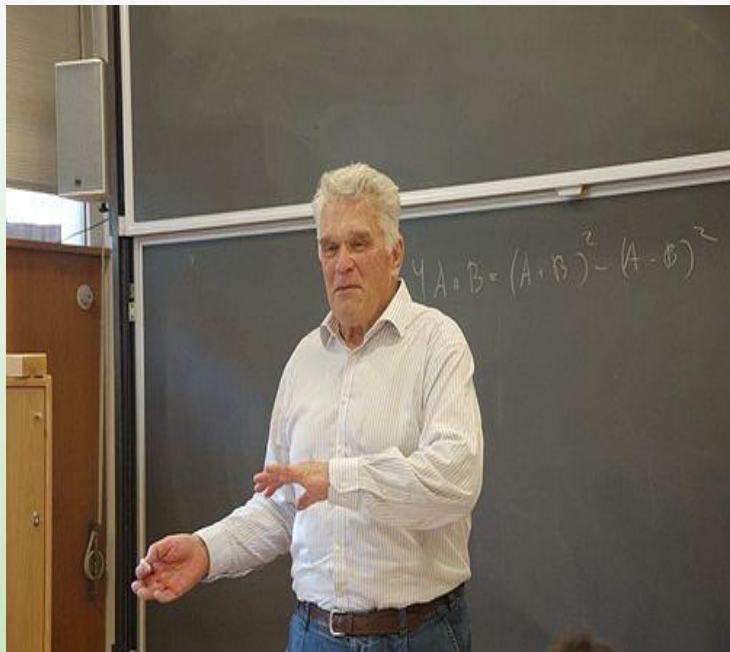
$$R(\lambda) = \frac{y(x, \lambda)}{y'(0, \lambda)}.$$

Тихонов А.Н. О единственности решения задачи электроразведки. ДАН СССР, 1949, т. 69, № 6, стр. 797-800.

И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан (1951). Метод восстановления оператора Штурма-Лиувилля по спектральной функции.

В.А. Марченко (1950, 1952). Впервые применил к исследованию обратных задач операторы преобразования.

М.Г. Крейн (1951-1954). Метод построения оператора Штурма-Лиувилля по спектральной функции и по двум спектрам. Нелинейная обратная задача для уравнения струны была сведена к интегральному уравнению (уравнение Крейна).



[Л.Д. Фаддеев](#). Единственность решения обратной задачи рассеяния. Вестник ЛГУ. Сер. мат. мех. астроном. 11 №. 7 (1956) Стр. 126-130.
Л.Д. Фаддеев. Обратная задача квантовой теории рассеяния
Успехи мат. наук, 14 № 4 (1959), стр. 57-119.

$$P(w) = \frac{e(0, w)}{j(-w)}$$

$$r'(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi |j(\sqrt{\lambda})|^2} \quad \lambda > 0$$

А.С. Алексеев. Некоторые обратные задачи теории распространения волн. Изв. АН СССР. 1962. Т. 11. Стр. 1514–1531.

- У Владимира Игоревича Арнольда было знаменитое высказывание, что математика – есть часть физики. Как вы к этому относитесь?
- Дима очень любил высказывать парадоксальные вещи, но в данном случае, конечно, это не так. Мы с ним много разговаривали на эту тему, он был чуть-чуть меня моложе. Он не любил квантовую теорию и придерживался Эйнштейновско-Колмогоровской линии, согласно которой классическая механика – это «чистая» вещь, а квантовая механика – «грязная». Что, конечно, совсем неправильно. Под конец жизни, я думаю, что убедил его в этом, но это было непросто.
- Я был «квантовым» с самого начала, с середины 50-ых годов. Еще я могу назвать имена Вити Маслова, Алика Березина и Боба Минлоса. Мы вчетвером занимались математикой в квантовой механике. А с Арнольдом мы ругались. Новиков присоединился к исследованиям в этой области гораздо позже. Я вообще могу похвастаться тем, что я был первым квантовым математическим физиком в России. Серж Новиков занимался топологией, Дима Арнольд и Яша Синай – динамическими системами, а Юра Манин — алгеброй. Но теперь все они называют себя математическими физиками.
- Я называю их всех первыми именами, поскольку мы были на «ты».

Е. Fermi, J. Pasta и S. Ulam (1954) обнаружили аномально медленную стохастизацию динамической системы цепочки нелинейных осцилляторов на ЭВМ.

М.Д. Kruskal, Zabussky (1964) обнаружили путем численного моделирования, что солитоны в КдФ сталкиваются упруго, в результате чего вскоре были открыты бесконечные серии законов сохранения.

С.С. Gardner, J.M. Green, М.Д. Kruskal и R.M. Miura (1967). Метод обратной задачи рассеяния для интегрирования уравнения Кортевега-де Фриза.

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

Уравнение Кортевега-де Фриза проинтегрировано, на основе перехода от потенциала одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + q(x)\psi = k^2\psi$$

к коэффициенту отражения на этом потенциале.

Задача Коши

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \\ u(x, 0) = f(x)$$

Решение задачи
Коши $u(x, t)$

Находим данные
рассеяния S_0 по
заданной $f(x)$

Обратная задача

Данные рассеяния S_0

для $t = 0$:

Данные рассеяния $S(t)$

для произвольного t

[В.Е. Захаров, А.Б. Шабат](#) (1971). Метод обратной задачи рассеяния интегрирования нелинейного уравнения Шредингера.

В.А. Садовничий (1972). Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися условиями.

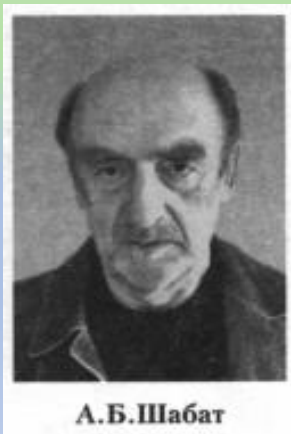
Л.Д. Фаддеев (1974). Восстановление потенциала в операторе Шрёдингера на всей оси по амплитуде рассеяния.

Первые многомерные аналоги уравнения Гельфанда-Левитана в обратных задачах рассеяния.

Л.Д. Фаддеев (1974). Обратные задачи квантовой теории рассеяния. II. Проблемы математики. Т. 3, 259.



В.Е. Захаров



**Международная научная конференция
«Современные методы в теории обратных задач и смежные вопросы»,
посвященная 80 – летию А.Б. Шабата
(г. Теберда, 20-23 сентября 2017 года)**

Секции:

1. Обратные задачи
2. Теория функций
3. Интегрируемые системы

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Председатель: академик РАН, профессор, д.ф.-м.н. Балегга Ю.Ю.

1. Абанин А.В. (Ростов-на-Дону), профессор, д.ф.-м.н.
2. Бухштабер В.М. (Москва), член-корреспондент РАН, профессор, д.ф.-м.н.
3. Кабанихин С.И. (Новосибирск), член-корреспондент РАН, профессор, д.ф.-м.н.
4. Погребков А.К. (Москва), профессор, д.ф.-м.н.
5. Тайманов И.А. (Новосибирск), академик РАН, профессор, д.ф.-м.н.
6. Юлмухаметов Р.С. (Уфа), профессор, д.ф.-м.н.

В.Е. Захаров, С.В. Манаков (1974). Нелинейное уравнение Шредингера, рассматриваемое как гамильтонова система, полностью интегрируемо. Переход осуществляется с помощью матрицы рассеяния одномерного оператора Дирака.

В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский (1980) в книге ``Теория солитонов: метод обратной задачи'' систематически изложили метод обратной задачи рассеяния, включая все необходимые математические сведения.

В.А. Садовничий (1983). Теорема единственности решения обратной задачи спектрального анализа в случае дифференциального уравнения с периодическими граничными условиями.

М.И. Белишев (1987). Метод граничного управления.

Sylvester J., Uhlmann G. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Annals of Mathematics*, 1987, vol. 125, pp. 153–169.

С.И. Кабанихин (1988). Многомерный аналог уравнений И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана и М.Г. Крейна.

$$2\Phi^{(k)}(x, t) - \sum_m \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t-s) \Phi^{(m)}(x, s) ds = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(k, y)}}{\rho(0, y)} dy, \quad t \in (-x, x), y \in R^n, k \in Z^n.$$

В науках о Земле изучаются три геосферы:

- 1) твердая Земля (литосфера),
- 2) океан (гидросфера),
- 3) атмосфера.

В основном применяются **физические методы**:

- 1) сейсмические,
- 2) электромагнитные,
- 3) гравиметрические,
- 4) оптические,
- 5) акустические, и многие другие.

Математическую основу этих методов составляют **уравнения математической физики**, описывающие количественную связь геофизических свойств изучаемых геосфер с наблюдаемыми физическими полями.

Особую роль играют **обратные и некорректные** задачи, при численном решении которых удается получать информацию о физических свойствах среды в точках, недоступных для непосредственных измерений.

Геофизические поля и уравнения математической физики

- Методы прикладной и скважинной геофизики
 - 1. **Гравиразведка** – уравнения Лапласа и Пуассона
 - 2. **Магниторазведка**
 - 3. **Электроразведка** – система уравнений Максвелла
 - 4. **Сейсморазведка** – система уравнений упругости
 - 5. **Терморазведка** – уравнение теплопроводности
 - 6. **Ядерная геофизика** – уравнение переноса
 - 7. **Геофизические исследования скважин**
- Методы разведочной геофизики основаны на изучении физических полей на поверхности Земли (на суше и на море), в воздухе — **Аэрогеофизика**, под землей — в шахтах и скважинах (**Каротаж**).

Полученные данные используются для определения расположения и основных характеристик геологических структур и рудных тел.

Основные изучаемые физические поля и соответствующие им методы полевой геофизики:

- **Поле упругих колебаний** — Сейсморазведка
- **Гравитационное поле** — Гравиразведка
- **Магнитное поле** — Магниторазведка
- **Электрическое поле** — Электроразведка
- **Поле ядерных излучений** — Радиометрия
- **Термическое поле** — Терморазведка

Обратные задачи

Основные тенденции в развитии обратных задач
в приложениях:

- Математизация (хорошо, но **очень опасно: малые ошибки в данных могут привести к очень большим ошибкам в решении**).
- Наступление коммерции (оживляет новое,
но губит старое).
- Глобализация (новое мгновенно тиражируется,
но вместе с ошибками).
- Интернет (**все знают все обо всем,**
но не могут сделать почти ничего).

Обратные и некорректные задачи

- В современной науке **обратные и некорректные задачи** стремительно развиваются почти во всех основных разделах **математики** (алгебра, анализ, геометрия, интегральные и дифференциальные уравнения, функциональный анализ, теория вероятностей, информатика)
- С другой стороны, почти во всех научных дисциплинах (**физика, геофизика, химия, биология, лингвистика, психология, экономика, медицина**) именно **обратные задачи** представляют наибольший интерес.
Искомые коэффициенты в основных математических уравнениях естествознания описывают важнейшие свойства окружающего мира, такие как **плотность и теплопроводность** вещества, **электромагнитные, акустические и упругие параметры** исследуемых сред, а также местоположение и границы включений, источники.

Обратные и некорректные задачи в математической геофизике

Алгебра	• Несовместные системы • Плохо обусловленные системы • Вырожденные системы
Анализ	• Дифференцирование • Интерполяция • Суммирование рядов Фурье
Геометрия	• Восстановление функции по интегралам по прямым, окружностям, геодезическим • Задача Радона
Интегральные уравнения	• Уравнение Фредгольма и Вольтера первого рода • Нелинейные интегральные уравнения 1 рода
Дифференциальные уравнения	• Обратная задача рассеяния • Спектральные обратные задачи
Уравнения в частных производных	• Эллиптические • Параболические • Гиперболические • Интегро-дифференциальные
Операторные уравнения	• Обращение компактных операторов • Нелинейные операторные уравнения
Оптимальное управление	• Градиентные методы в некорректных задачах

Обратные и некорректные задачи в геофизике

Задачи: Найти упругие, электромагнитные и другие характеристики Земли

Разделы: Сейсмика, электроразведка, магниторазведка, гравиразведка, терморазведка, ядерная геофизика

Уравнения математической физики:

$$c^{-2} u_{tt} = \Delta u - \nabla \ln \rho \cdot \nabla u$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + j_{ex} \\ \operatorname{rot} E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \end{cases}$$

Уравнения теории упругости, уравнение теплопроводности, уравнение переноса, уравнения Лапласа и Пуассона

Численные методы решения обратных и некорректных задач

Операторные уравнения

$$Aq = f$$

$$A(q + \delta q) - Aq = A'(q) \delta q + o(||\delta q||)$$

Вариационная постановка

$$J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle \rightarrow \min$$

$$J'(q) = 2 [A'(q)]^* (Aq - f)$$

Все методы можно разделить на **прямые** и **итерационные**

Прямые методы:

- ☐ Линеаризация: $A'(q_0) q_1 = f_1$
- ☐ Обращение разностной схемы
- ☐ Метод Гельфанда-Левитана-Крейна
- ☐ Метод граничного управления
- ☐ Метод сингулярного разложения

Итерационные методы:

- ☐ Метод простой итерации
$$q_{n+1} = q_n - \alpha [A'(q_n)]^* (Aq_n - f)$$
- ☐ Градиентные методы
$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J'(q_n)$$
- ☐ Метод Ньютона-Канторовича
$$q_{n+1} = q_n - [A'(q_n)]^{-1} (Aq_n - f)$$

Метод Гельфанда-Левитана-Крейна

Рассмотрим 2D-аналог метода Гельфанда-Левитана-Крейна.

Будем зондировать среду импульсными по времени и синусоидальными по горизонтальной переменной y источниками

$$u_{tt}^k = \Delta u^k - \nabla \ln \rho(x, y) \nabla u^k, \quad x > 0, \quad y \in R, \quad t > 0;$$

$$u^k|_{t < 0} \equiv 0;$$

$$u_x^k(+0, y, t) = e^{iky} \cdot \delta(t);$$

$$u^k|_{y=\pi} = u^k|_{y=-\pi}.$$

Предположим, что мы имеем набор импульсных характеристик (сейсмограмм после двумерной деконволюции)

$$u^k(+0, y, t) = f^k(y, t).$$

Нетрудно вычислить, что

$$f^k(y, +0) = -e^{iky}, \quad y \in R, \quad k \in Z.$$

Последовательность прямых задач

$$c^{-2}(x, y)v_{tt}^{(n)} = \Delta v^{(n)} - \nabla \ln \rho(x, y) \cdot \nabla v^{(n)},$$

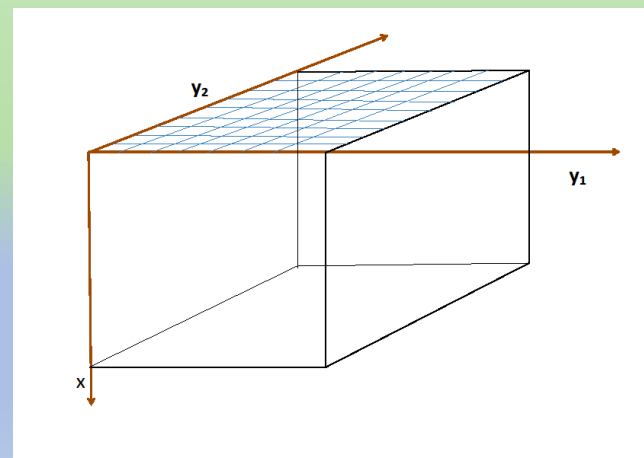
$$y \in R^2, \quad x > 0, \quad t > 0;$$

$$v^{(n)}|_{t < 0} \equiv 0;$$

$$v_x^{(n)}(+0, y, t) = h_n(y) \cdot \delta(t), \quad y \in R^2, t \in R$$

Обратная задача: определить коэффициенты уравнения по дополнительной информации

$$v^{(n)}(+0, y, t) = g^{(n)}(y, t), \quad y \in R^2, t \in R.$$



Последовательность прямых задач

$$u_{tt}^k = \Delta u^k - \nabla \ln \rho(x, y) \nabla u^k, \quad x > 0, \quad y \in R, \quad t > 0;$$

$$u^k|_{t < 0} \equiv 0;$$

$$u_x^k(+0, y, t) = e^{iky} \cdot \delta(t);$$

$$u^k|_{y=\pi} = u^k|_{y=-\pi}.$$

Обратная задача заключается в определении функции $\rho(x, y)$ по дополнительной информации

$$u^k(+0, y, t) = f^k(y, t).$$

Необходимое условие существования решения обратной задачи

$$f^k(y, +0) = -e^{iky}, \quad y \in R, \quad k \in Z.$$

Определим семейство вспомогательных прямых задач ($m \in \mathbf{Z}$)

$$w_{tt}^m = \Delta w^m - \nabla \ln \rho(x, y) \nabla w^m, \quad x > 0, y \in R, t > 0;$$

$$w^m(0, y, t) = e^{imy} \cdot \delta(t); \quad w_x^m(0, y, t) = 0.$$

Решение можно представить в виде:

$$w^m(x, y, t) = S^m(x, y) \cdot [\delta(x+t) + \delta(x-t)] + \tilde{w}^m(x, y, t), \quad S^m(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho(x, y)}{\rho(0, y)}} \cdot e^{imy}.$$

Связь между решением начальной прямой задачи и вспомогательной дается формулой

$$u^k(x, y, t) = \sum_m \int_0^t f_m^k(t-s) w^m(x, y, s) ds.$$

Обозначим
$$\Phi^m(x, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{w^m(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi dy.$$

Тогда можно получить семейство интегральных уравнений

Многомерный аналог уравнения Крейна

$$2\Phi^k(x, t) - \sum_m \int_{-x}^x f_m^{k'}(t-s)\Phi^m(x, s) ds = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy,$$
$$|t| < x, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Решение обратной задачи связано с решением уравнения Крейна формулой

$$\rho(x, y) = - \frac{\pi^2}{\rho(0, y)} \left[\sum_m \Phi^m(x, x-0) e^{-imy} \right]^{-2}$$

Для вычисления решения $\rho(x, y)$ на глубине x_0 достаточно решить уравнение Крейна с фиксированным параметром x_0 и определить $\rho(x_0, y)$

Переход к конечной системе интегральных уравнений

N- приближение уравнения М.Г. Крейна

$$2\Phi(x, t) - \sum_{|m| \leq N} \int_{-x}^x F(t-s)\Phi(x, s)ds = G, \quad t \in (-x, x), k_j = -\overline{N}, \overline{N}, j = 1, 2.$$

$$\text{Здесь } \Phi(x, t) = (\Phi^{(-N)}(x, t), \dots, \Phi^{(0)}(x, t), \dots, \Phi^{(N)}(x, t))^T,$$

$$G = (G^{(-N)}, \dots, G^{(0)}, \dots, G^{(N)})^T \text{ и } G^{(k)} = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(k,y)}}{\rho(0,y)} dy.$$

$$F(t) = \begin{vmatrix} f_{-N}^{(-N)'} & f_{-N+1}^{(-N)'} & \dots & f_0^{(-N)'} & \dots & f_N^{(-N)'} \\ f_{-N}^{(-N+1)'} & f_{-N+1}^{(-N+1)'} & \dots & f_0^{(-N+1)'} & \dots & f_N^{(-N+1)'} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{-N}^{(0)'} & f_{-N+1}^{(0)'} & \dots & f_0^{(0)'} & \dots & f_N^{(0)'} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{-N}^{(N)'} & f_{-N+1}^{(N)'} & \dots & f_0^{(N)'} & \dots & f_N^{(N)'} \end{vmatrix}$$

После дискретизации переходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$(2I - hA)\Phi = G \quad A = \begin{bmatrix} F(0) & F(-h) & \dots & F((2n-1)h) \\ F(h) & F(0) & \dots & F((2n-2)h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F((2n-1)h) & F((2n-2)h) & \dots & F(0) \end{bmatrix}$$

A - квадратная матрица размерности $2n \times (2N + 1)^2$

Матрица A имеет блочно-теплицевую структуру.

Здесь n - число разбиений по глубине, N - количество гармоник Фурье.

Мы используем быстрое обращение блочно-теплицевой матрицы, предложенное [В.В. Воеводиным и Е.Е. Тыртышниковым](#).

Алгоритм основан на рекурсивном методе Левинсона-Дарбина

В.В. Воеводин, Е.Е. Тыртышников. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. Москва: Наука, 1987.

S.I. Kabanikhin, N.S. Novikov, I.V. Oseledets, and M.A. Shishlenin. Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2015. Vol. 23, No. 6.

Метод Монте-Карло

Систему интегральных уравнений

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^m \int_X k_{ij}(x, y) \varphi(y) dy + h_i(x)$$

переписываем в виде: $\Phi = K\Phi + H$

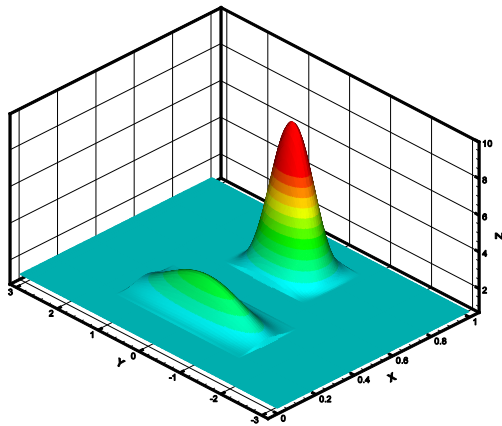
Особенности метода Монте-Карло

Зависимость времени счета от глубины

Стохастический итерационно-проекторный метод

Особенности стохастического метода

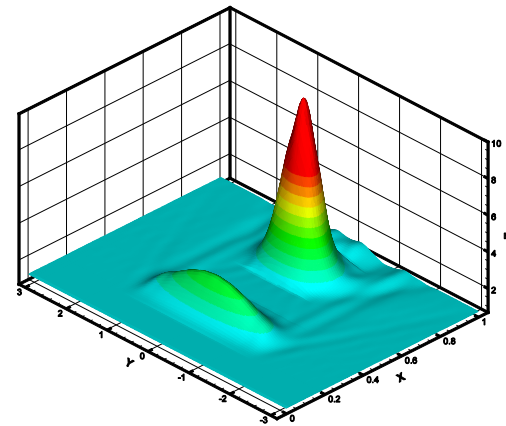
Метод М.Г. Крейна – численное решение двумерной обратной задачи



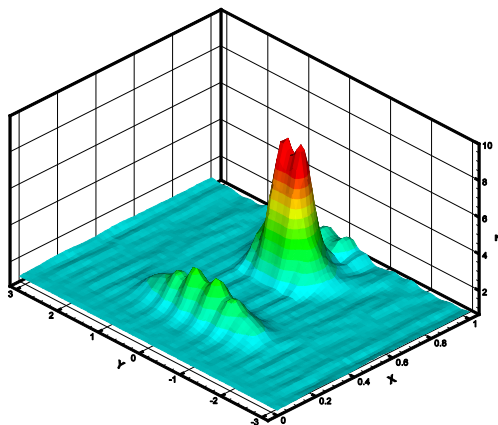
Количество
коэффициентов
Фурье 20

Шаг по глубине 0.02

Точное решение
обратной задачи



Решение обратной
задачи с точными
данными



Решение обратной задачи с приближенными
данными (погрешность 2%).

Метод Гельфанда-Левитана-Крейна определения скорости

Последовательность прямых задач

$$c^{-2}(x, y)u_{tt}^{(k)} = \Delta u^{(k)}, \quad x \in R, \quad y \in R, \quad t > 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$u^{(k)}(x, y, 0) = 0; \quad u_t^{(k)}(x, y, 0) = e^{iky} \cdot \delta(x).$$

Обратная задача: определить функцию $c(x, y)$ по дополнительной информации

$$u^{(k)}(0, y, t) = f^{(k)}(y, t), \quad u_x^{(k)}(0, y, t) = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пусть $\tau(x, y)$ есть решение задачи Коши для уравнений эйконала

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = \frac{1}{c^2(x, y)}, \quad x > 0, y \in R;$$

$$\tau(0, y) = 0, \quad \tau_x(0, y) = \frac{1}{c(0, y)}, \quad y \in R.$$

Введем новые переменные $z = \tau(x, y), \quad y = y$

и новые функции $v^{(k)}(z, y, t) = u^{(k)}(x, y, t), \quad b(z, y) = c(x, y)$

При условии $c(x, y) \geq c_0 > 0$

замена будет невырожденной в некоторой окрестности $x \in (0, h)$

Расположение Красноярска приводит к катастрофическому накоплению промышленных и транспортных выбросов в приземном слое.

По результату доклада директора ИВМиМГ СО РАН на публичных слушаниях Законодательного собрания «Об экологической ситуации в Красноярске...» решение о необходимости моделирования распространения примесей в воздухе города включено в резолюцию.

«В законе о бюджете края на 2017-2019 выделено 12 млн на проведение работ по оценке и прогнозированию изменения качества приземного слоя на основе математического моделирования»
Из письма Председателя Правительства Края
Томенко В.П. Председателю
Законодательного Собрания Уссу А.В.



Инверсия в котловине города – природная ловушка загрязнений.

Облачность, верхний край которой совпадает с нижней границей инверсии оседания, закрывает котловину города как крышка. Огни на снимке – освещенная парковка Академии биатлона

Усвоение данных : решение

последовательности обратных задач

$$\frac{\partial \varphi_c}{\partial t} + \nabla \cdot (w \varphi_c - \mu \nabla \varphi_c) + P_c(\vec{\varphi}) \varphi_c = \Pi(\vec{\varphi}) + f + r, (z, t) \in \Omega_{\infty}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u - f v + k w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_u + r_u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v + f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_v + r_v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w - k u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_w + r_w$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \left(\frac{c_p}{c_v} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) p = \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) \rho c_p F_p + f_p + r_p$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T + \left(\frac{R_d}{c_v} (1 + \alpha) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) T = \frac{c_p}{c_v} F_T + f_T + r_T$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad \rho_a = p (R_d (1 + \alpha) T)^{-1}$$

$$F_\varphi = \operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \varphi, \quad \varphi = \{u, v, w, p, T, \dots\}$$

$$+ c(r, t) \int_0^{\max} K(r, r') c(r', t) dr' + \frac{\partial}{\partial r} (U(r) c(r, t)) - \frac{\partial^2}{\partial r^2} (U_D(r) c(r, t)) = 0,$$

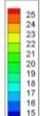
$$q(r, r') = (r^3 - r'^3)^{\frac{1}{3}}, \quad w(r, r') = r^2 / q(r, r')^2;$$

$$c(r_{\min}, t) = 0, \quad c(r_{\max}, t) = 0, \quad c(r, 0) = c_0(r).$$

Особенности алгоритма усвоения данных

- Схема расщепления по пространственным переменным и физическим процессам.
- При поступлении новых данных решается обратная задача уточнения параметров модели по данным измерений. Решения на предыдущих этапах используются для следующей итерации.
- Вариационное усвоение данных на отдельных шагах расщепления.
- Прямые алгоритмы вариационного усвоения на шагах переноса и трансформации.
- Согласованные дискретно-аналитические численные схемы для процессов трансформации.

Penenko, A. V.; Penenko, V. V. Tsvetova, E. A. Sequential data assimilation algorithms for air quality monitoring models based on a weak-constraint variational principle. Numerical Analysis and Applications, 2016 , No 9 , pp. 312-325.



50 m

Подходы к моделированию

Модели в которых решаются системы уравнений гидротермодинамики атмосферы, а также процессов переноса и трансформации атмосферных примесей.

Преимущества: высокая гибкость и возможность учета различных процессов и факторов.

Особенности: необходимость использования высокопроизводительных ЭВМ и задание большого количества параметров.

Примеры:
*AERMOD,
CALPUFF,
ОНД-86*

Примеры: *WRF-CHEM,
Cosmo-ART,
Enviro-HIRLAM, модели
ИВМиМГ СО РАН*

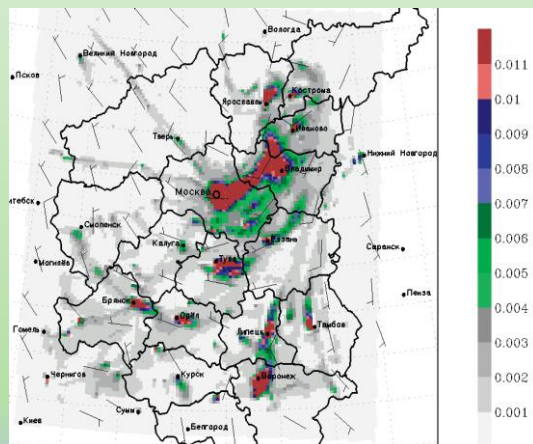
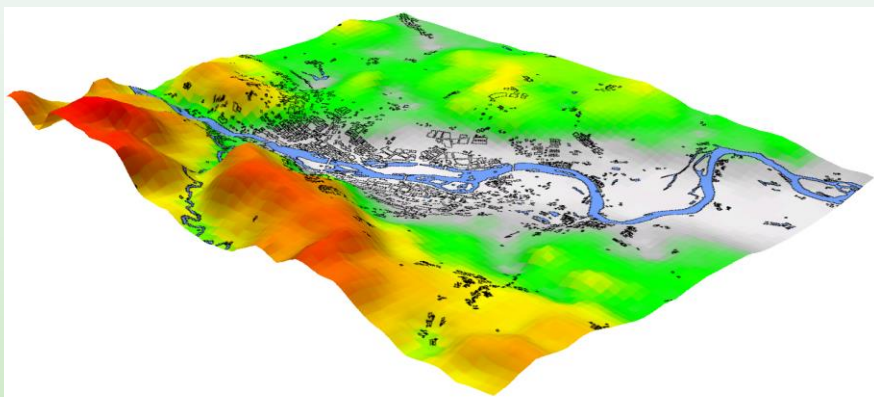
Дисперсионные модели атмосферы, Гауссовы модели – основаны на частных решениях систем уравнений.

Особенности : малая гибкость при исследовании нестандартных ситуаций

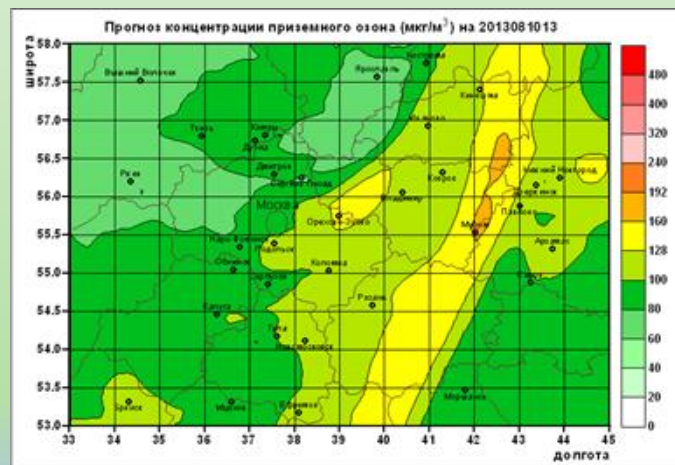
Преимущества : скорость расчета (достаточно ЭВМ со средними характеристиками) и наглядность формул.

Системы усвоения данных сети мониторинга и решения специализированных обратных задач для восполнения недостатка информации о параметрах

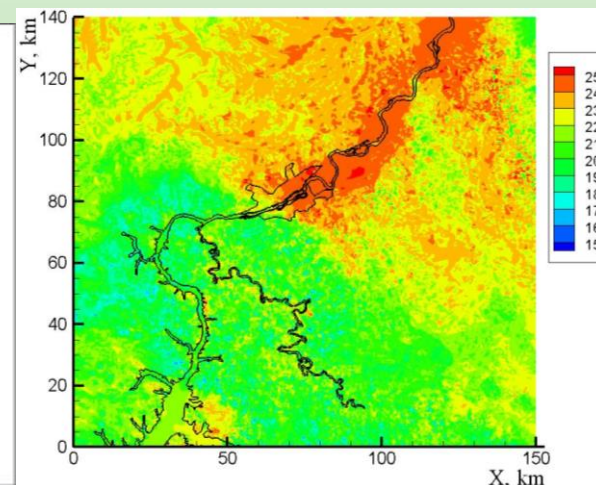
Примеры использования моделей в России



Прогноз концентрации диоксида серы (ppm) в Московском регионе по модели COSMO-ART (Г. Суркова и др., 2015)



Прогноз концентрации озона (мкг/м³) в Московском регионе по модели WRF-CHIMERE. (Р.Б. Зарипов, И.Б. Коновалов, И.Н. Кузнецова, 2015)



Расчет поля температуры в окрестностях Красноярск в летний период по модели ИВМиМГ СО РАН (Э. Пьянова, В. Пененко, Л. Фалейчик, 2016)

Задачи, решаемые с помощью модельного комплекса

- COSMO-ART, настроенная для рельефа Красноярск – основа для подсеточных включений параметрических описаний внутрисиноптических и внутрисуточных масштабов; повышение пространственно-временного разрешения до 30 м и 3 часов
- Замена методики ОНД-86 (Общесоюзного нормативного документа), утвержденного ГоскомГидрометом СССР в 1986 году.
- Воспроизведение эффектов, приводящих к скапливанию загрязнений. Учет влияния антициклонической инверсии оседания, при которой приземный слой в безветренную погоду сжимается до 70-80 метров. Учет низких речных зимних туманов. Тяжелые ядра конденсации способны собрать все загрязнения в 5-10 метрах. Мезомасштабные внутригородские замкнутые системы циркуляций
- Проверка применимости к условиям Красноярск существующих способов искусственной вентиляции приземного слоя: установки, разработанные в НПО «Тайфун» Росгидромета и ФИ РАН им. П.Н. Лебедева



Построены алгоритмы численного моделирования для высокочастотного акустического зондирования дна водоемов.

Авторы: В.Г. Лужецкий, А.С. Белоносов,
А.В. Белоносова, С.П. Виноградов.

Прямая задача

Найти смещение $W(z, t)$ точек
одномерной упругой среды,
исходя из уравнения акустики

$$\rho(z)W_{tt} = (\mu(z)W_z)_z, t > 0, z > 0$$

с граничными и начальными условиями

$$2\mu W_z|_{z=0} = f(t), W|_{t \leq 0} \equiv 0.$$

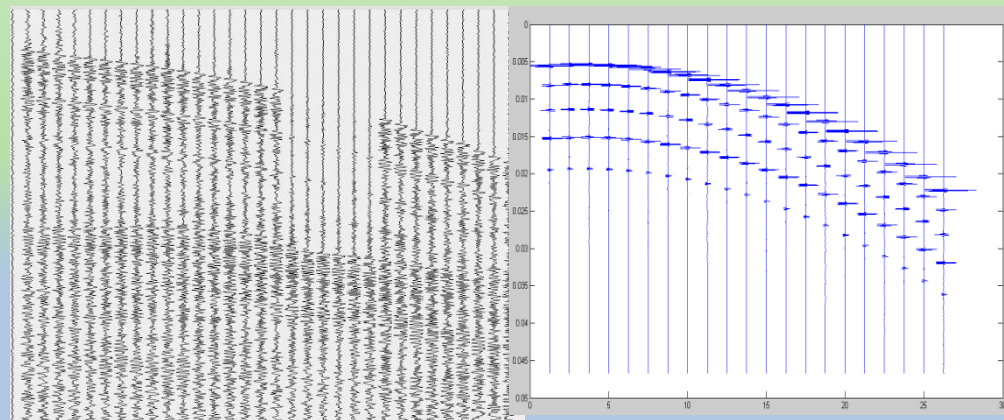
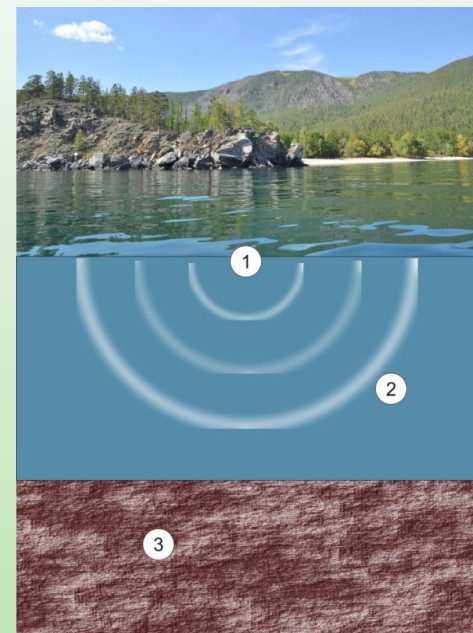
Обратная задача

Найти акустический импеданс среды

$\sigma(z) = \sqrt{\mu(z)\rho(z)}$, если известны
воздействие $f(t)$

и отклик

$$g(t) = W(0, t).$$

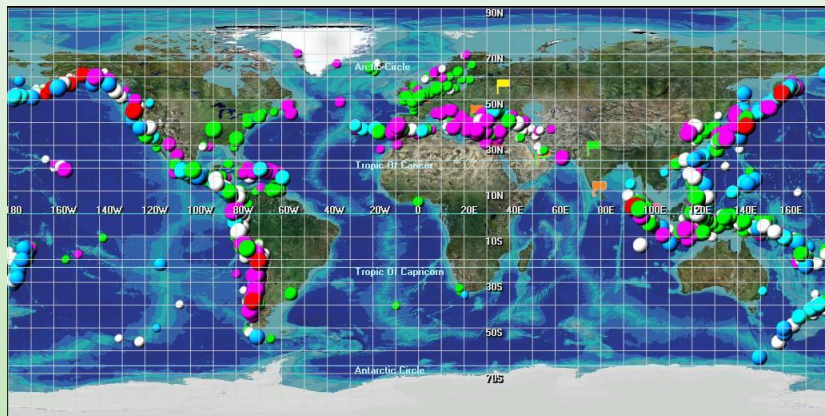


Реальные данные
(Телецкое озеро)

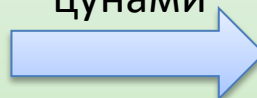
Модельное поле

Определение источника цунами

Актуальность



Прогноз
цунами



До 80%
ЛОЖНЫХ
прогнозов

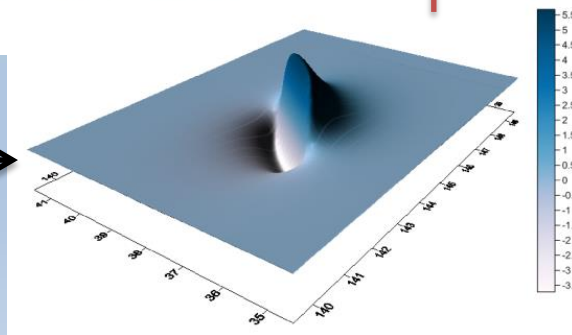
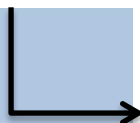
Материальные и человеческие затраты
для предупреждения населения



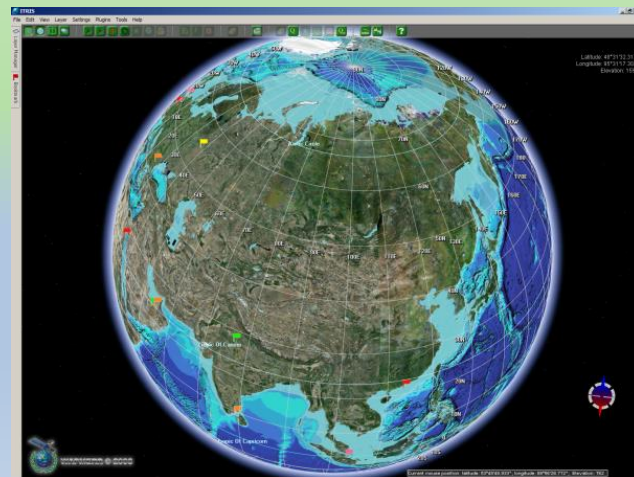
80% всех цунами возникают в
результате землетрясения



Определение источника
цунами по данным о
землетрясении
происходит с ошибкой



ГИС – мониторинг цунами с
вероятностью ложного прогноза



Геинформационная система ITRIS (Integrated Tsunami Research and Information System)



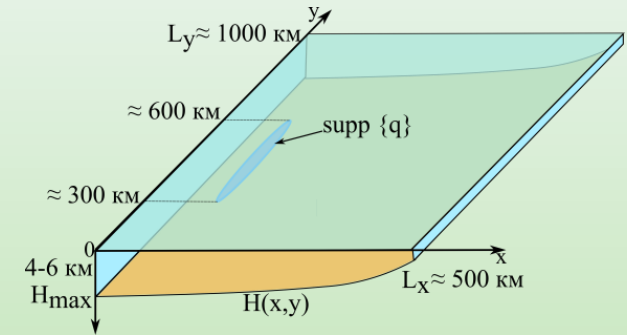
В Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН совместно с Wapmerr и GeoСистема на базе Windows с использованием драйвера визуализации DirectX разработана геоинформационная система ITRIS.

ITRIS является системным обеспечением, которое в отличие от Google Maps позволяет подключать динамические программные модули, дающие возможность численного моделирования и визуализации событий, происходящих в отдельных участках Земли, начиная с крупномасштабных явлений (цунами, землетрясения, извержения вулканов, наводнения и т.п.) и заканчивая локальными природными и техногенными изменениями и катастрофами (затопление населенных пунктов, лесные пожары, разрушение отдельных районов и т.п.).

В данную геосистему уже включены базы данных землетрясений, цунами, мест падений метеоритов и крупных тел (включая возможные взрывы), мест извержений вулканов. В систему ITRIS подключены динамические программные модули, позволяющие визуализировать реальные и предполагаемые цунами, разливы рек, распространение зон затопления во время наводнений и цунами.

Обратная задача цунами

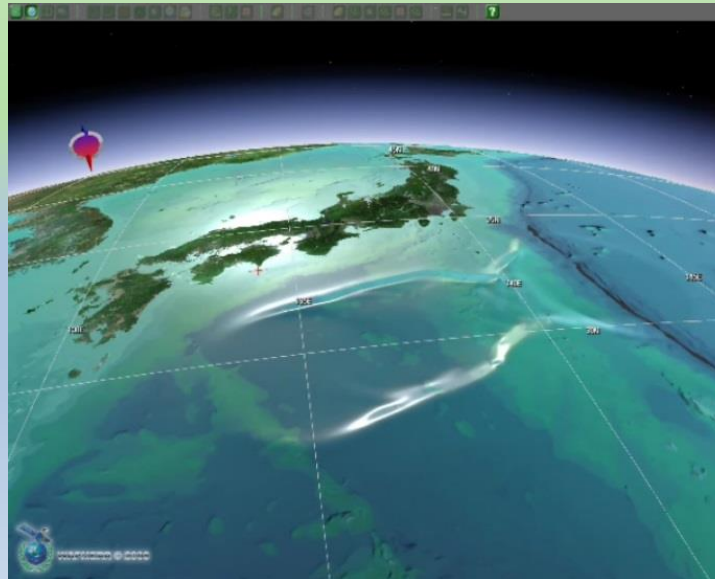
$$\begin{cases} \eta_{tt} = \operatorname{div}(gH^2(x,y) \operatorname{grad} \eta), & (x,y) \in \Omega, t > 0; \\ \eta|_{t=0} = q(x,y), \quad \eta_t|_{t=0} = 0, & (x,y) \in \Omega = (0, L_x) \times (0, L_y); \\ \eta|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \eta(x_m, y_m, t) &= f_m(t), & (x_m, y_m) &\in \Omega, t \in (T_{m_1}, T_{m_2}), & m &= 1, 2, \dots, M, M \in \mathbb{N}, \\ \eta(x, y, T) &= f(x, y), & (x, y) &\in \omega \subset \Omega. \end{aligned}$$

Глубоководные станции

Спутниковые данные



$$Aq = F, \quad q \in H^1(\Omega), \quad F(t) \in C((0, T); E^M)$$



$$\sum_{m=1}^M \int_{T_{m_1}}^{T_{m_2}} \int_{x_m - \varepsilon}^{x_m + \varepsilon} \int_{y_m - \varepsilon}^{y_m + \varepsilon} (\eta(x, y, t) - f_m(t))^2 dy dx dt$$

$$\rightarrow \min_q$$

Алгоритм определения амплитуды переднего фронта волны

$$\begin{cases} \eta_{tt} = \operatorname{div}(gH^2(x, y) \operatorname{grad} \eta), & t > 0; \\ \eta|_{t=0} = h(y)\delta(x), & \eta_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Замена $z = \tau(x, y)$, где $\tau(x, y)$ — решение уравнения эйконала $\tau_x^2 + \tau_y^2 = (gH)^{-1}(x, y)$

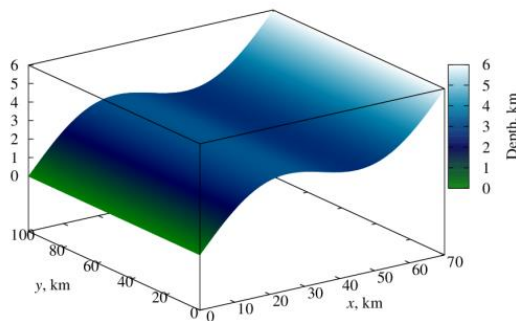
Представление решения в виде
 $\eta(x, y, t) = s(z, y) \cdot \theta(t - z) + \tilde{v}(z, y, t),$

$$b(z, y) = c(x, y)$$

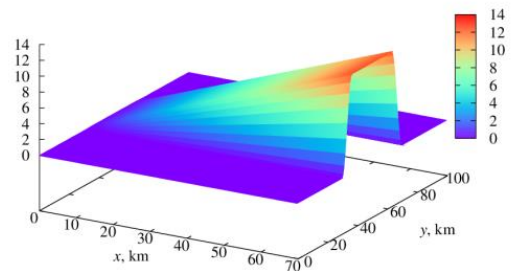
Определение функции двух
переменных s вместо
вычисления функции трех
переменных.

$$(1) \begin{cases} s_z + b^2 \tau_y s_y + \left(\frac{1}{2} b^2 (\tau_{xx} + \tau_{yy}) + \frac{b_z}{b} + b b_y \tau_y \right) s = 0, & z, y > 0; \\ s(0, y) = 0.5 h(y) \sqrt{b^{-2} - \tau_y^2} \Big|_{z=0}. \end{cases}$$

Рельеф дна



Распределение амплитуды

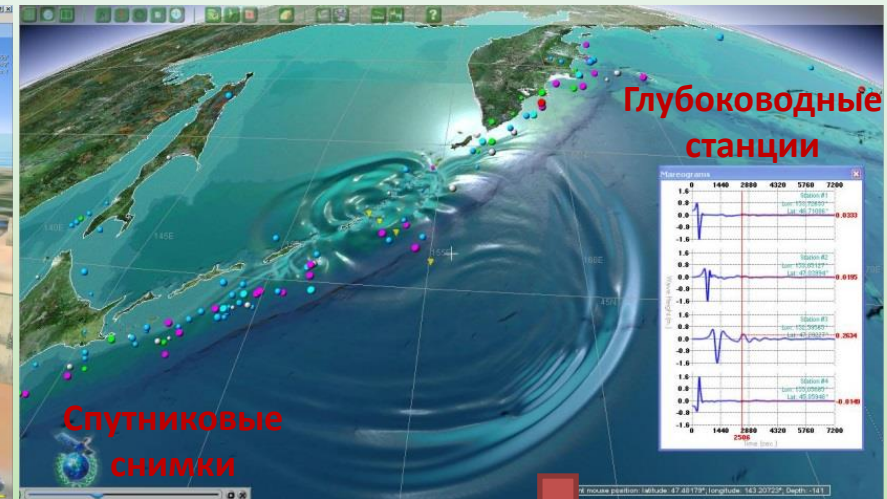
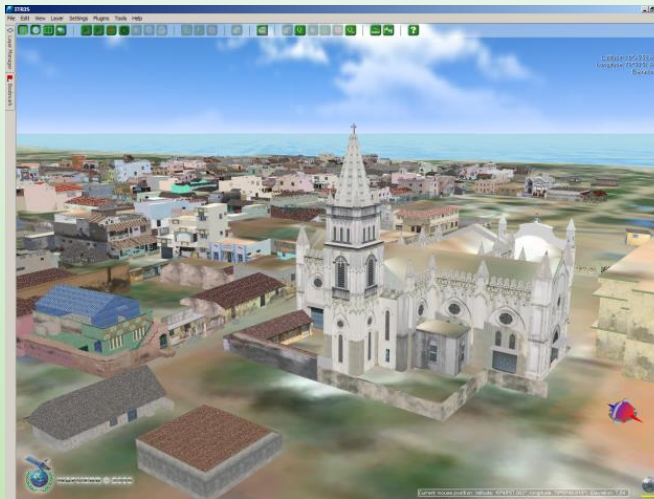


В одномерном случае
решение задачи Коши (1)
совпадает с формулой
Эри-Грина

$$s(x) = s(0) \sqrt[4]{H(0) / H(x)}$$

3D ГИС ITRIS (ИВМ и МГ)

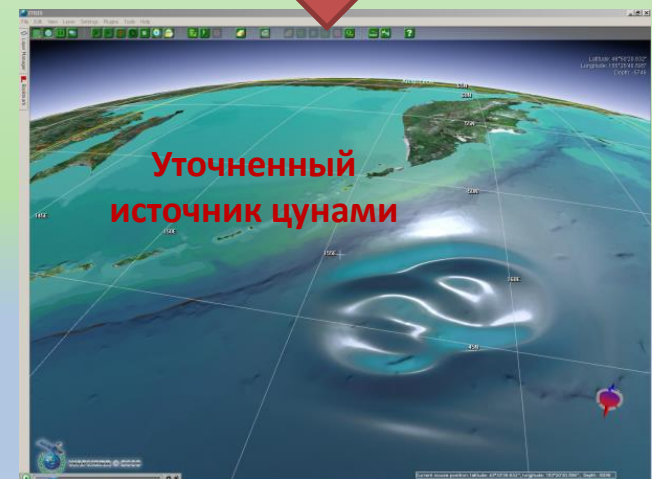
Разработан
программный
модуль
уточнения
источника
цунами



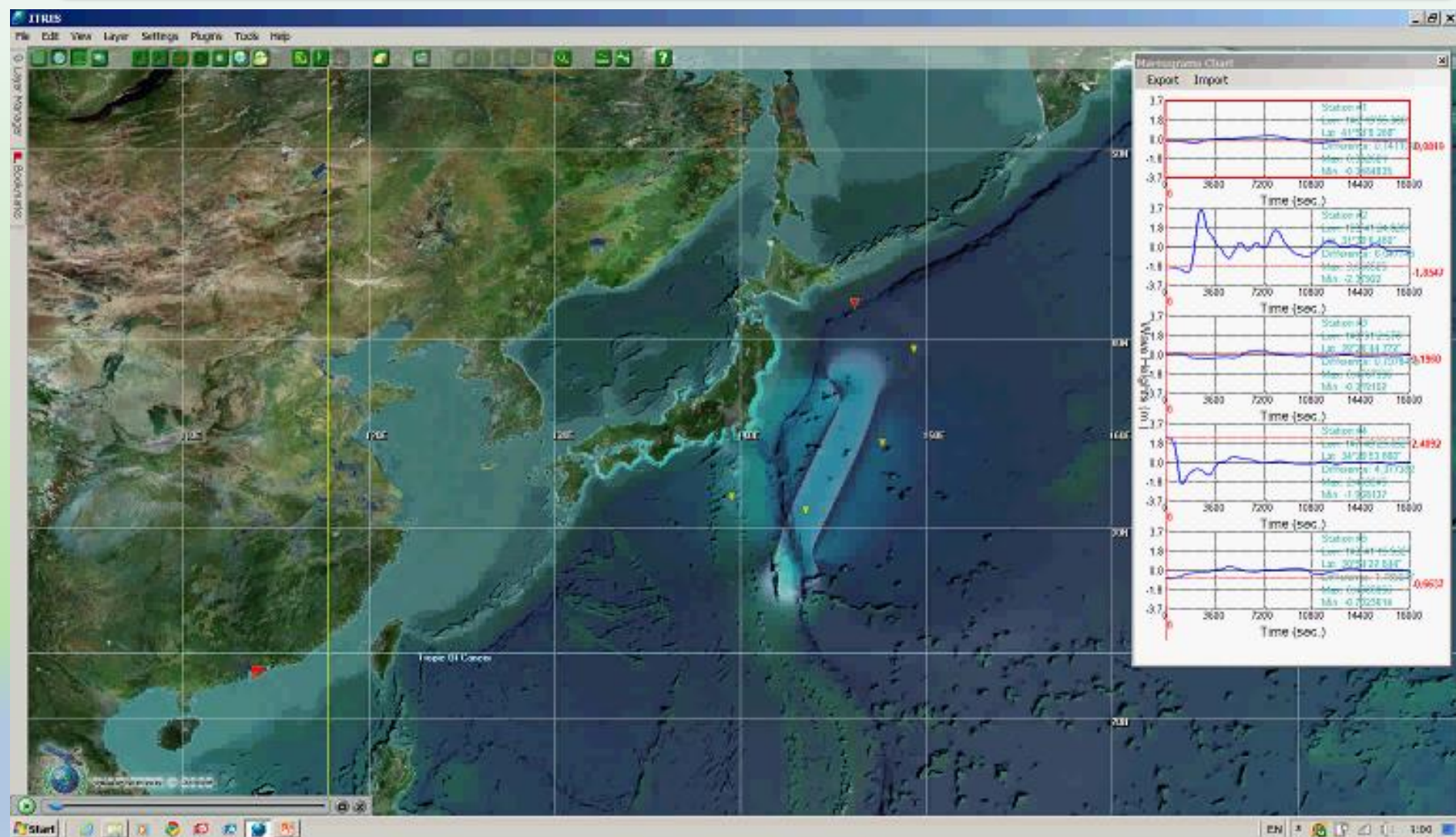
Назначение

Сопровождение исследований

Мониторинг и прогнозирование

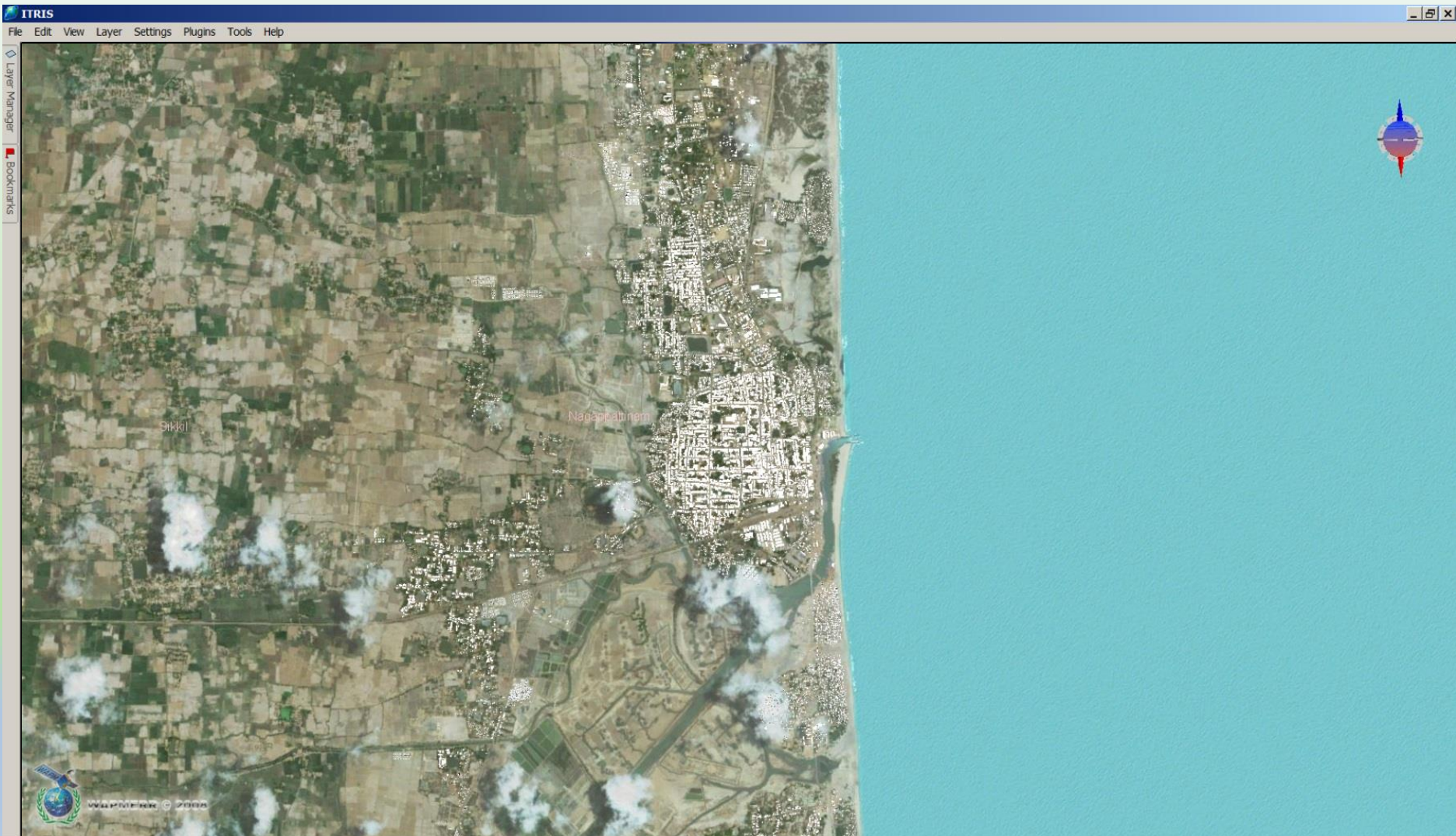


ITRIS: распространение цунами



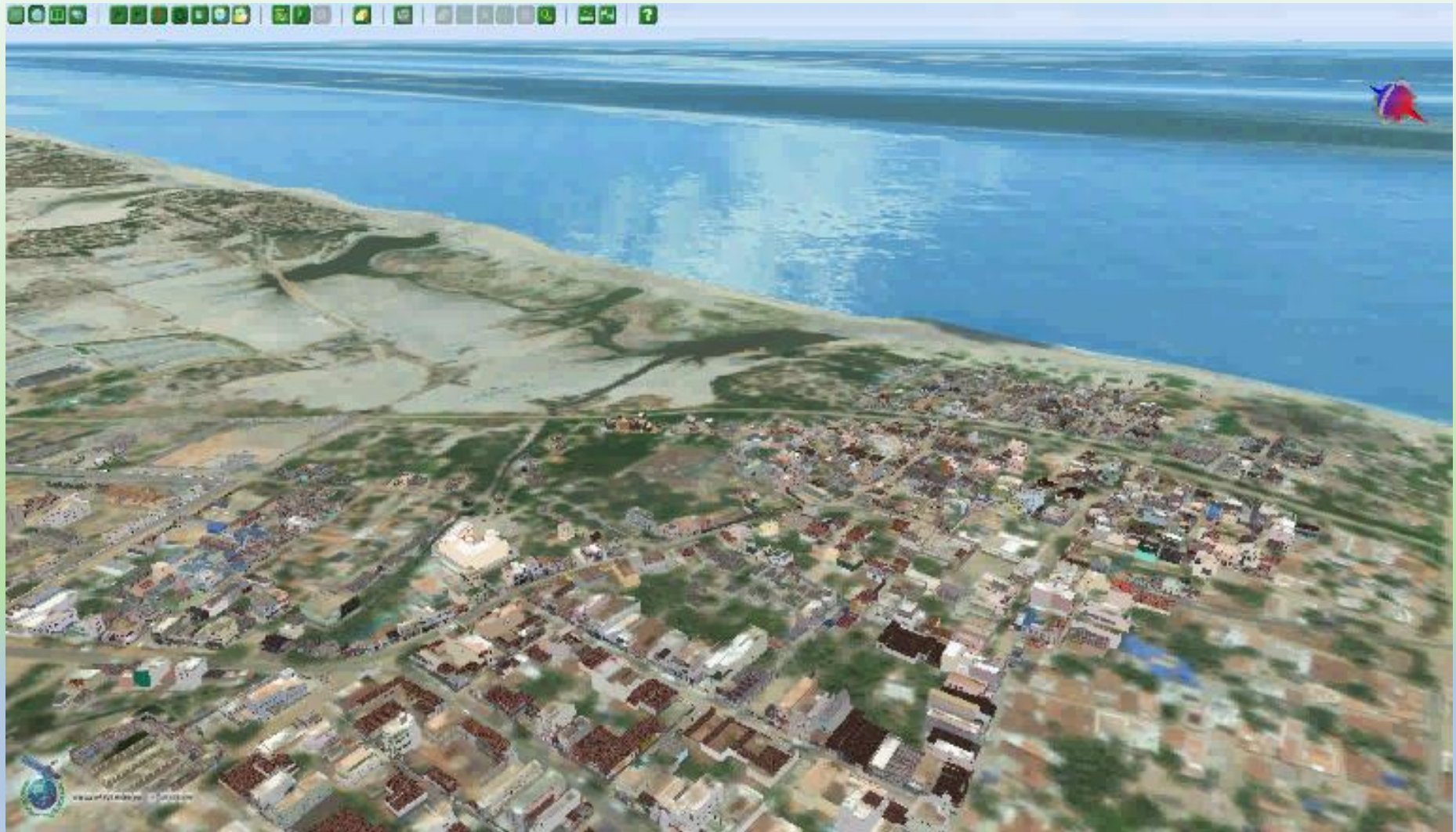
Численное моделирование Симуширского цунами

ITRIS: визуализация



Город Нагапаттинам, Индия.

ITRIS: моделирование наката цунами



Карта затоплений г. Нагапаттинам, Индия.

Численные методы решения прямых и обратных задач иммунологии, эпидемиологии и фармакокинетики

Обратная задача биологии

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X(t), \Theta), \\ X(0) = X_0, \\ X(t_k) = \Phi^{(k)}. \end{cases}$$



$$J(\Theta) = \sum_{k=0}^K |X(t_k, \Theta) - \Phi^{(k)}|^2 \rightarrow \min_{\Theta}.$$

$X(t)$ — вектор неизвестных функций модели;
 $X(0)$ — начальные данные;
 Θ — вектор неизвестных параметров модели;
 $F(X(t), \Theta)$ — заданная вектор функция, описывающая модель;
 $\Phi^{(k)}$ — статистические данные о течении эксперимента;

$J(\Theta)$ — целевая функция для задачи оптимизации;
 K — количество измерений или статистических данных.

Приложения

Иммунология

Фармакокинетика

Эпидемиология

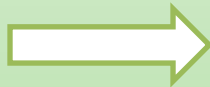
Внедрение в медицинские центры

Рабочее место
иммунолога



- Научно-исследовательские центры
- ВУЗы
- Клинические центры
- Аптечные пункты
- Мобильные приложения

Рабочее место
фармакокинетики

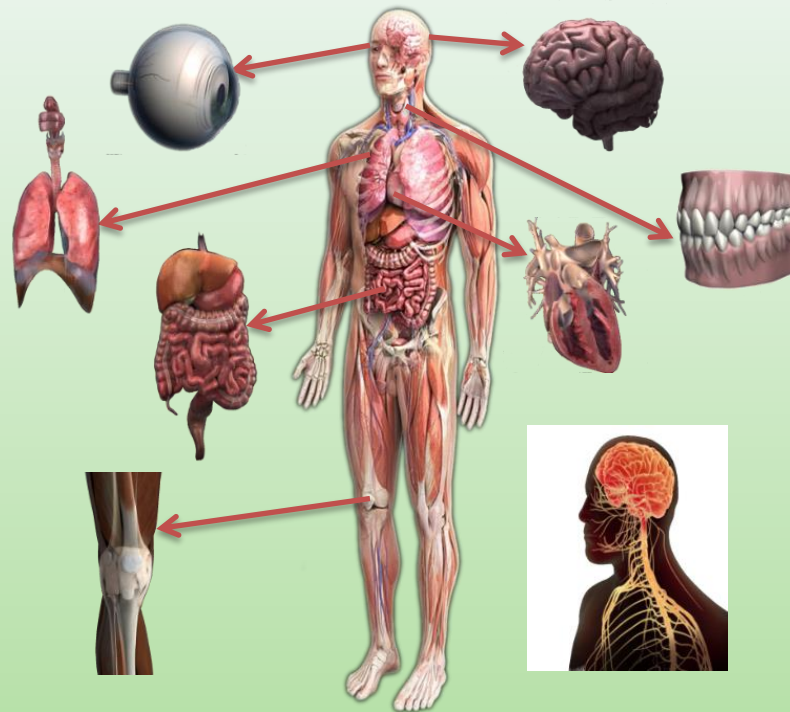


- Министерство здравоохранения РФ
- ВОЗ

Рабочее место
эпидемиолога



Математическое описание анатомической модели человека



Человеческий организм может быть представлен как фиксированная структура (ориентированный граф) с очень большим, но не бесконечным числом вершин и связей.

Вершины графа представляют собой переменные организма (т.е. входные и выходные сигналы систем и органов).

Каждая взаимосвязь в любой заданный момент времени имеет хорошо определенные статистические и динамические характеристики, которые определяют эффект входных сигналов и механизмы работы существенных переменных.

Коэффициенты, определяющие интенсивность каждой связи, непрерывны и слабо меняются в процессе адаптации организма. Поэтому организм может быть рассмотрен как система с постоянными связями. Состояние организма (то есть значения всех его переменных) определяется количеством внешних факторов, влияющих на структуру, и текущими значениями коэффициентов.

Аэродинамика верхних дыхательных путей мышки-слепушонки

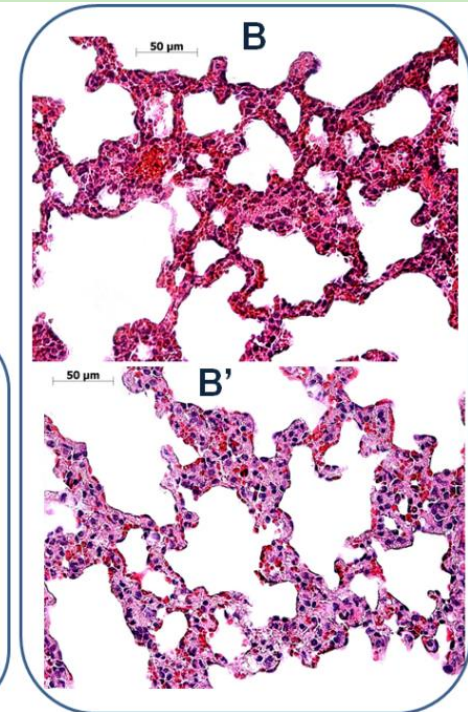
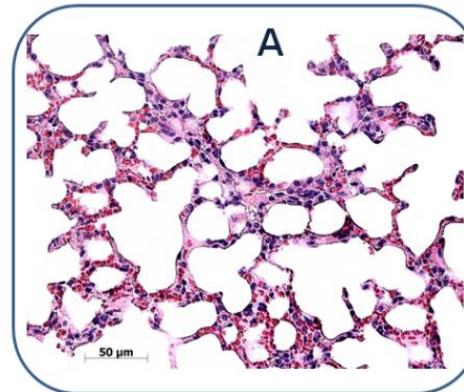


слепушонки

Рассматривая типичных представителей норных (обыкновенная слепушонка) и наземных (мышь) видов, можно заключить, что мышь, имеющая меньшее мертвое пространство дыхательных путей и более тонкие стенки альвеол, в большей степени приспособлена к «борьбе за кислород», чем слепушонка.

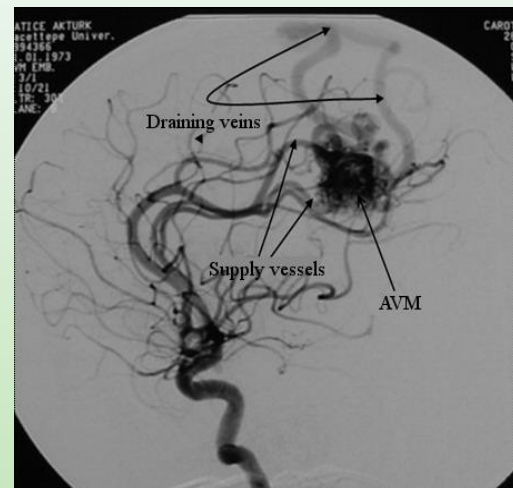
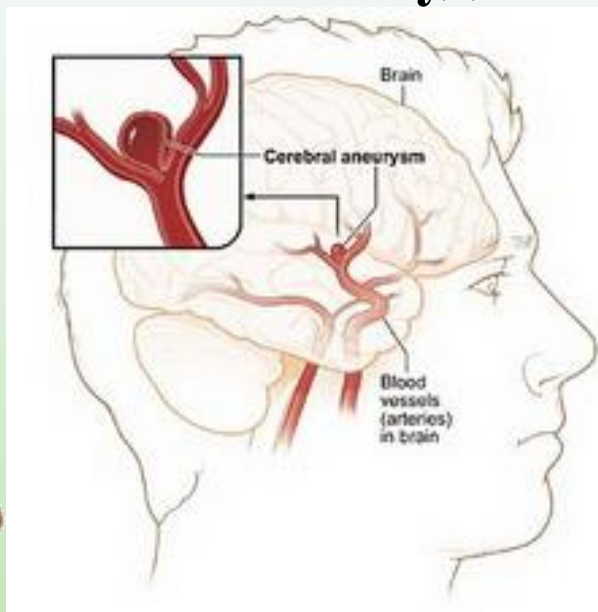
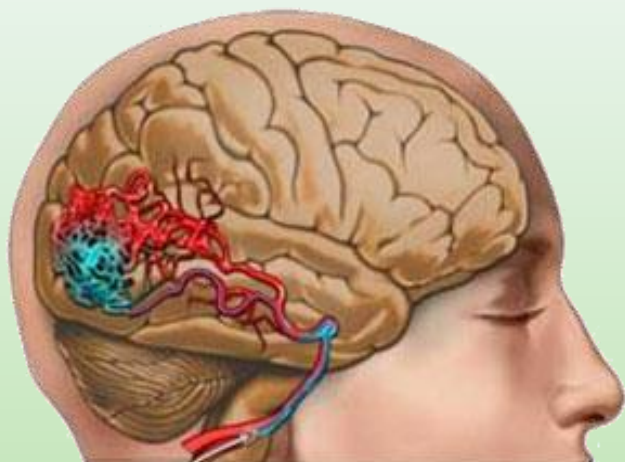


Гистологические препараты альвеол лабораторной мыши (А) и обыкновенной слепушонки (В и В')



Реакция мукозального иммунитета легких на вдыхание наноразмерных аэрозолей существенно различается у мышей разных генетических линий и у обыкновенной слепушонки – вида, адаптированного к дыханию в запыленной среде.

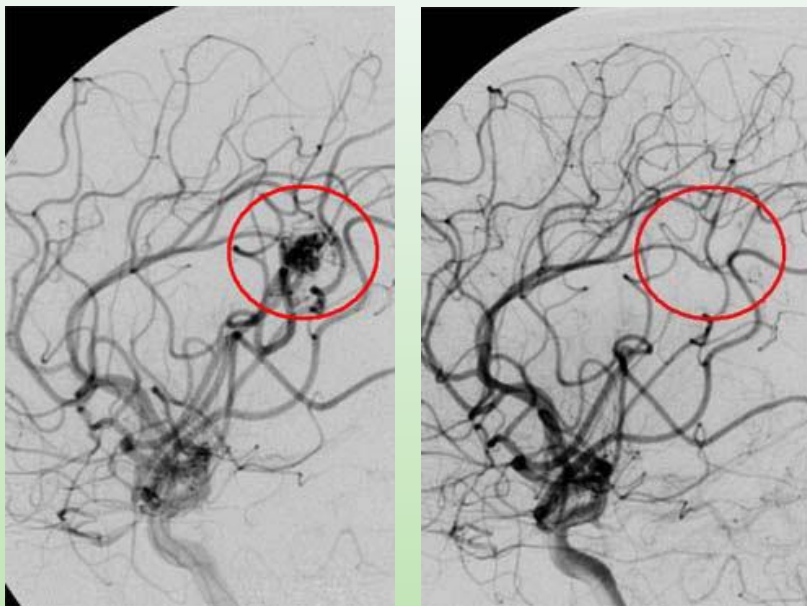
Моделирование аномалий в сосудах головного мозга



Развитие современных технологий программного обеспечения позволяют реализовать более совершенную трёхмерную реконструкцию в целом органов человека, частных сосудистых структур. Реконструкция предоставит возможность актуализировать интересующий участок выбранных структур и получить трёхмерное представление о динамике происходящих событий. Моделирование динамики аномальных явлений в выделенной области (особенно, в головном мозге) очень важная задача в медицине.

Одной из наиболее часто встречающихся аномалий в сосудах головного мозга является артериовенозные мальформации (АВМ). АВМ это анатомический «клубок» (скопление) патологических сосудов, через которые потоки крови из церебральной (мозговой) артерии поступают в вены.

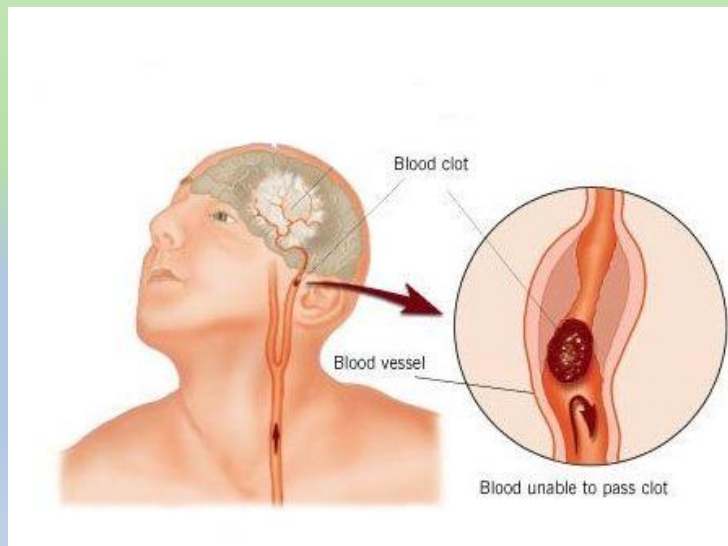
Моделирование аномалий в сосудах головного мозга



АВМ до операции (слева) и результат операции (справа)

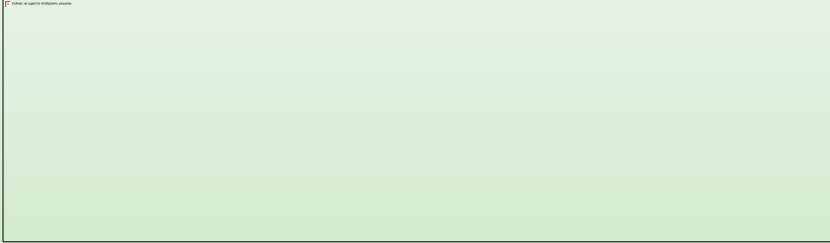
В этом случае необходимо создать трехмерную модель аномалий выделенных областей для проведения виртуальной операции. Это может значительно уменьшить стоимость и опасность эксперимента. Эта система требует хирургического вмешательства в естественный жизненный процесс организма для дальнейшего анализа предстоящей операции.

Эндоваскулярная эмболизация является достаточно современным методом обработки сосудистых мальформаций головного мозга, который пригоден для описания глубоко расположенных в головном мозгу структур. Метод состоит в том, что через артерию по сосудам, где расположена мальформация, пропускается пластический катетер. Тогда субстанция, введенная в полость артерии, блокирует «клубки» сосудов. Поэтому, аномальный поток крови блокируется.



Постановка задачи

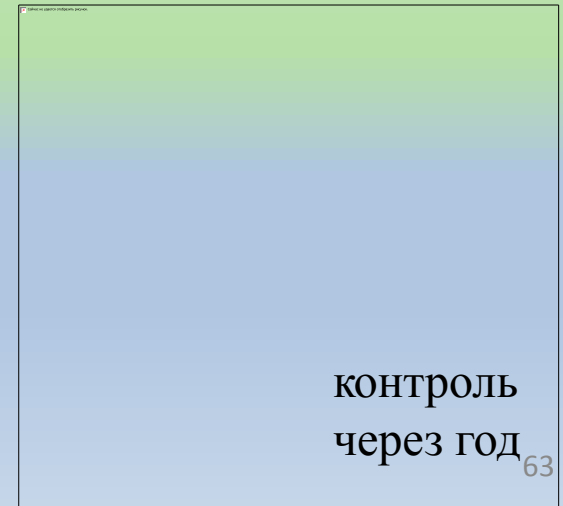
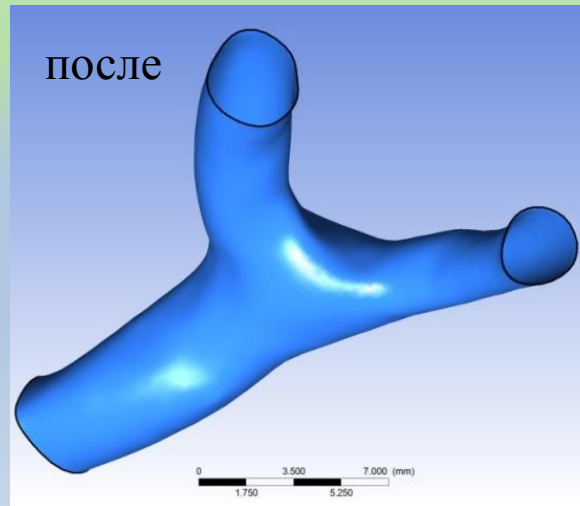
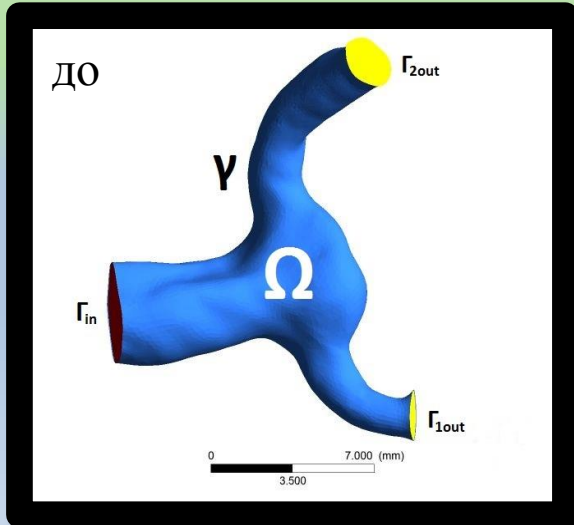
Течение крови описывается уравнениями Навье-Стокса для трехмерного стационарного движения несжимаемой, вязкой, ньютоновской жидкости



Расчетная область, включающая в себя конфигурацию сосудов в виде тройника и аневризму, располагающуюся в месте бифуркации.

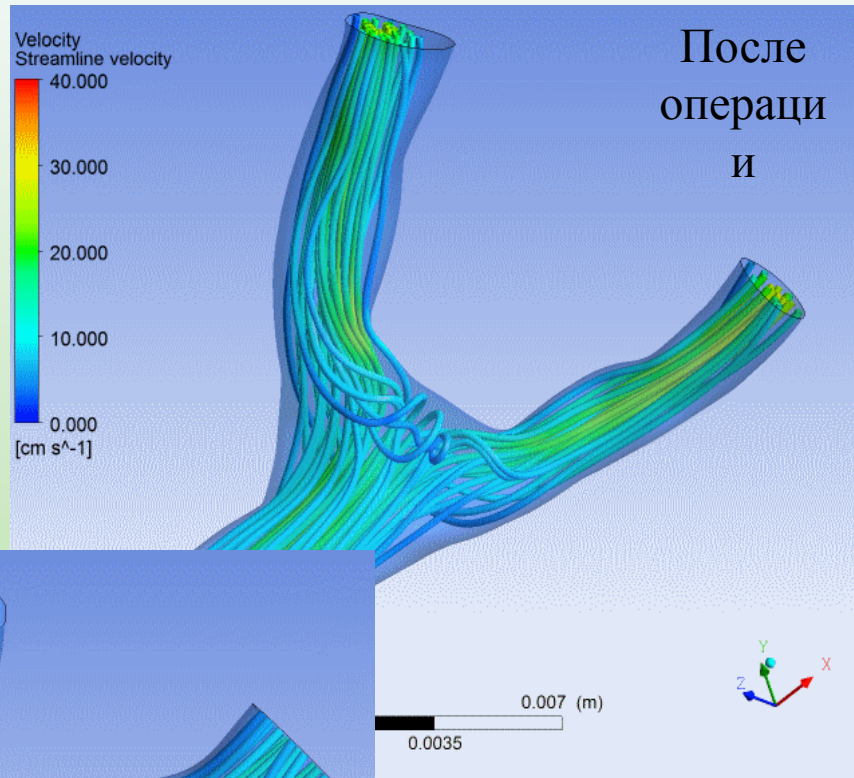
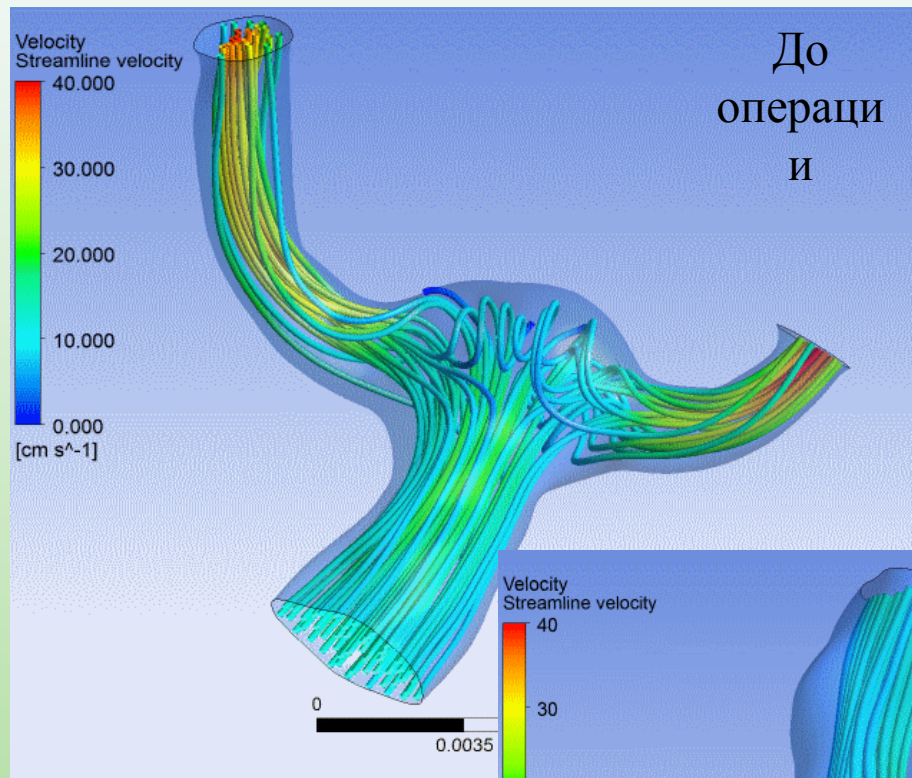
Здесь v_{real} и p_{real} - значения скорости и давления, снятые с датчика во время операции.

Γ_{in} - сечение материнского сосуда тройника, Γ_{1out} , Γ_{2out} - сечения дочерних сосудов



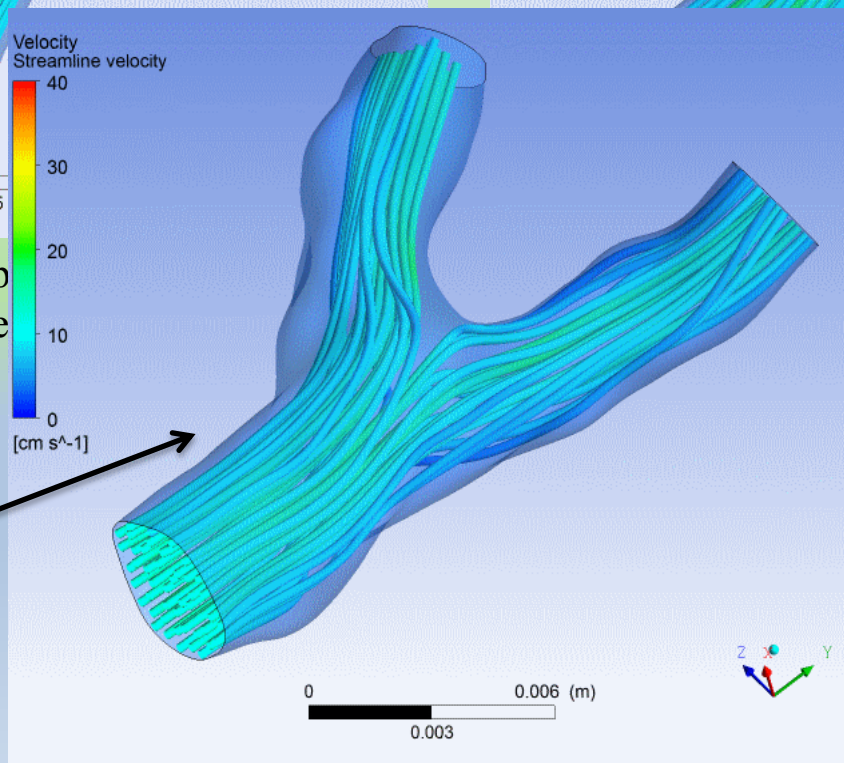
контроль
через год

Численные расчеты линий тока посредством пакета Ansys



Высокие значения скорости
внутри анастомоза

Спустя год после
операции



С максимальной скоростью.
"кольцевого" вихря.

Слабая
завихренность,
скорость
уменьшилась.

Возможность подключения медицинских учреждений страны в единую информационную сеть



Распространение сигнала в одномодовом волоконном световоде под влиянием вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) описывает обобщённое нелинейное уравнение Шрёдингера в скалярном виде

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -i\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} + i\gamma \left(1 + \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(A(z, t) \int_0^\infty R(\tau) |A(z, t - \tau)|^2 d\tau \right)$$

Здесь $A(z, t)$ - медленно-меняющаяся огибающая электромагнитного поля, β_2 и β_3 - коэффициенты дисперсии второго и третьего порядков в окрестности несущей частоты ω и т.д.

Начальное условие для уравнения имеет вид $A(0, t) = A_0(t)$

Разработка быстрых численных алгоритмов решения уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко

$$M(t, \tau) + \int_t^\infty R(\tau + y) M(t, y) dy = 0$$

Нелинейная фотоника. М.П. Федорук, С.К. Турицын, Д.А. Шапиро, Л.Л. Фрумин.

В волоконном лазере с резонатором типа Фабри-Перо две волны с одинаковыми частотами и состояниями поляризации распространяются по световоду в противоположных направлениях и взаимодействуют друг с другом за счёт фазовой кросс-модуляции. Амплитуды прямой и обратной волн удовлетворяют системе связанных нелинейных уравнений Шрёдингера с потерями и усилением:

$$\frac{\partial A^+}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A^+}{\partial t} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A^+}{\partial t^2} = i\gamma(|A^+|^2 + 2|A^-|^2)A^+,$$

$$\frac{\partial A^-}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A^-}{\partial t} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A^-}{\partial t^2} = i\gamma(|A^-|^2 + 2|A^+|^2)A^-.$$

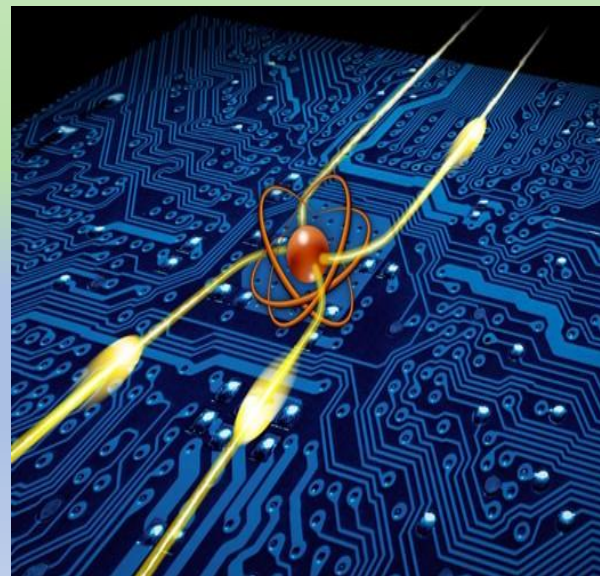
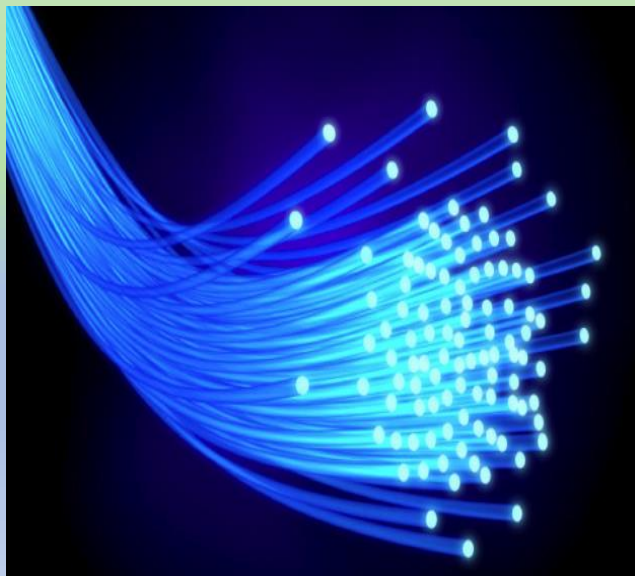
Здесь верхние индексы ``плюс" и ``минус" обозначают волны, распространяющиеся в прямом и обратном направлении, β_1 и β_2 - коэффициенты дисперсии первого и второго порядков, γ - коэффициент нелинейности.

Разработка быстрых численных алгоритмов решения уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко

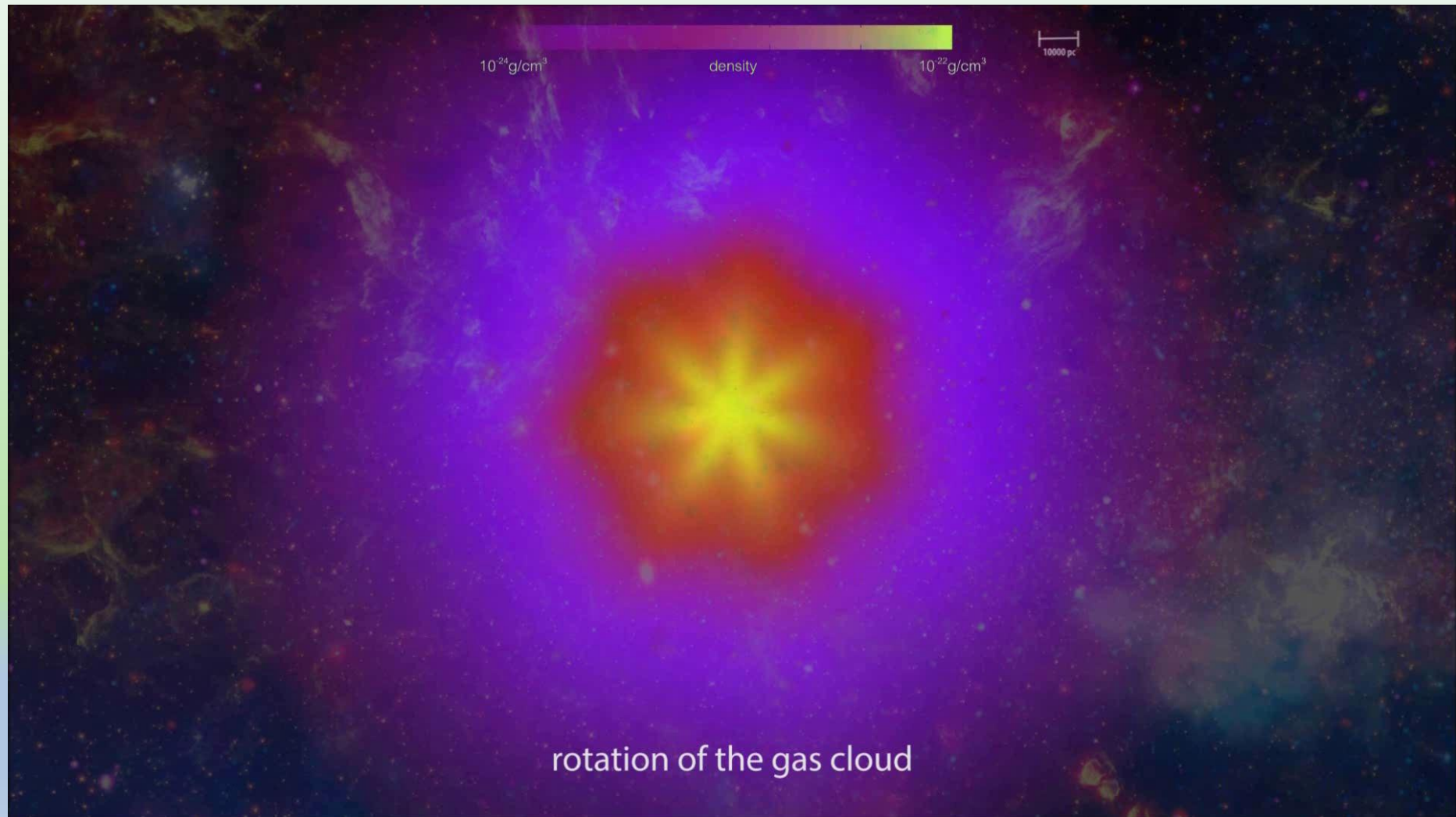
$$M_1(t, \tau) + \int_t^\infty R(\tau + y) M_2(t, y) dy = 0, \quad \mp M_2(t, \tau) + R(t + \tau) + \int_t^\infty R(\tau + y) M_1(t, y) dy = 0.$$

Разработан программный метод коррекции искажений, возникающих в оптических системах передачи данных. Результаты тестирования прототипа системы зафиксировали уникальные показатели производительности канала: при сохранении качества передаваемого сигнала скорость его передачи превысила действующие рекордные показатели лучших из существующих коммерческих систем в 24 раза и составила 240 Гбит/сек.

На социальном уровне увеличенная скорость передачи данных откроет новую эру для больших данных и Интернета вещей (IoT). В случае реализации технологии, около 10 тысяч человек смогут передавать 4K-видео за то же время, которое, по сравнению с текущей скоростью, доступно только для 400 человек.



Подтверждена теория усиления раскочки с образованием внутреннего Линдбладовского резонанса. Теория основана на механизме развития гравитационной неустойчивости



**Плотность газа дисковой галактики.
В ходе эволюции образуется семируканная галактика**

**Экспериментально подтверждена гипотеза
(Институт астрономии РАН) об образовании молекулярного водорода
в области высокой плотности газа при столкновении галактик**



**Плотность газа взаимодействующих галактик.
В верхнем левом углу изображена плотность молекулярного
водорода, образовавшегося в течение одного года**

Прямая задача о взрыве сверхновой

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{v} \\ \rho E \\ \rho \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho \vec{v} \\ \rho \vec{v} \otimes \vec{v} - \nabla \pi - \rho \nabla \Phi \\ \rho \vec{v} \otimes \vec{v} - \nabla \pi - \rho \nabla \Phi \\ \rho \vec{v} \otimes \vec{v} - \nabla \pi - \rho \nabla \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon$$

$$w|_{t=0} = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{v} \\ p \end{pmatrix}|_{t=0} = q(r) \quad r \in \Omega \subset R^3$$

ρ - плотность

Φ - потенциал E - полная энергия

ε - внутренняя энергия γ - показатель адиабаты

G - гравитационная постоянная

$$\pi G \rho$$

$$\varepsilon + \frac{\rho u^2}{2}$$

и

прихле

СВЕРХНОВОЙ:

новой информации

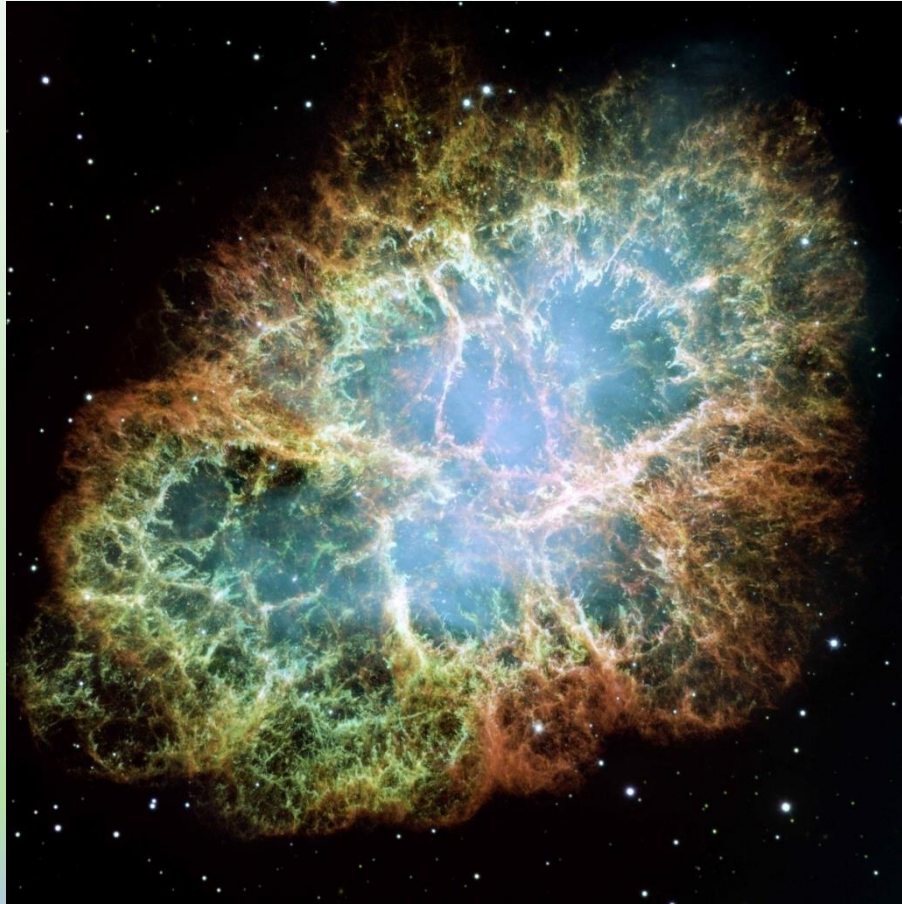
$$w(r, T; q) = f(r) \quad T \in [1 \div 10^3 \text{ лет}, + 10^4 \text{ лет}]$$

Задача решается минимизацией функционала

$$\mathfrak{J}(q) = \int_{\Omega} (w(r, T; q) - f(r))^2 dx \rightarrow \min \quad q_{n+1}(r) = q_n(r) - \beta \mathfrak{J}'_{q_n}(r)$$

$\mathfrak{J}'_{q_n}(r)$ - решение сопряженной задачи

Обратная задача о взрыве сверхновой



**Дополнительная информация – астрономические наблюдения:
остаток сверхновой SN 1054 – Крабовидная туманность (NGC 1952)**

Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A., Kulikov I.M. The inverse problem for supernova explosion of type II. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2017, to appear

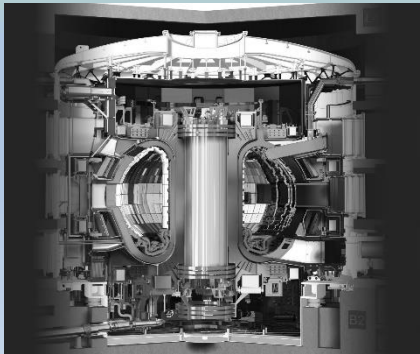
А.В. Бурдаков, А.С. Аракчеев ИЯФ СО РАН

Г.Г. Лазарева ИВМиМГ СО РАН

Математическое моделирование эрозии вольфрама при импульсном тепловом воздействии мощного электронного пучка

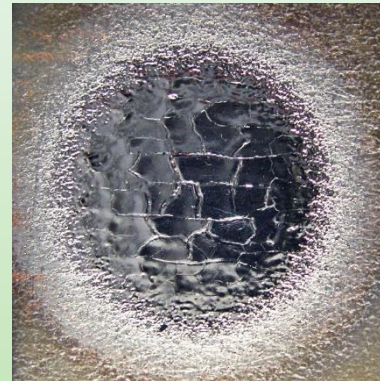
Основной ориентир: ИТЭР.

Для обоснованного выбора режимов работы необходимы достоверные сведения о том, что будет происходить с материалами первой стенки и дивертора при нормальных режимах работы, а также при быстрых плазменных процессах, т.к. при них ожидается наиболее сильное повреждение материалов первой стенки и диверторной зоны

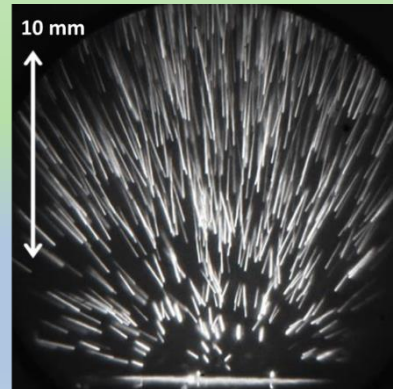


Стенд для изучения импульсного нагрева на основе инжектора электронов (ИЯФ)

Появление расплавленного слоя приводит к увеличению эрозии поверхности и генерации микрочастиц.



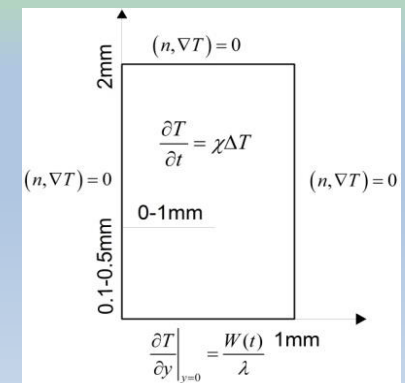
Формирование неоднородностей свечения поверхности



Быстрая съемка вылетающих с поверхности частиц вольфрама

Задача термоупругости

Для построения моделей, адекватно описывающих взаимодействие мощных потоков плазмы с конструкционными материалами, требуется изучение не только конечных результатов взаимодействия, но, главным образом, физических процессов протекающих во время взаимодействия плазмы с веществом.



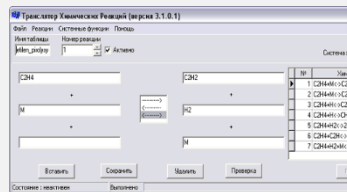
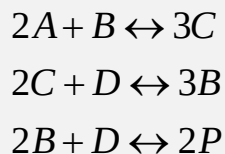


ChemPAK/PharmKIN

Решение кинетических задач

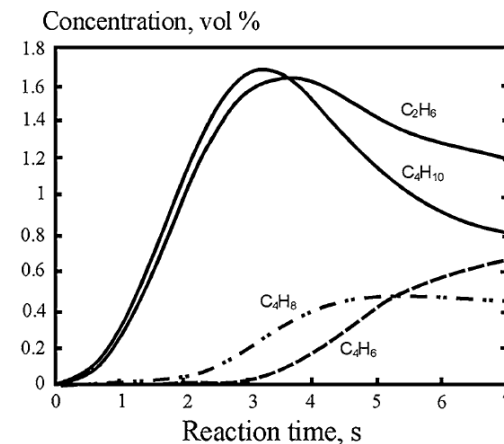
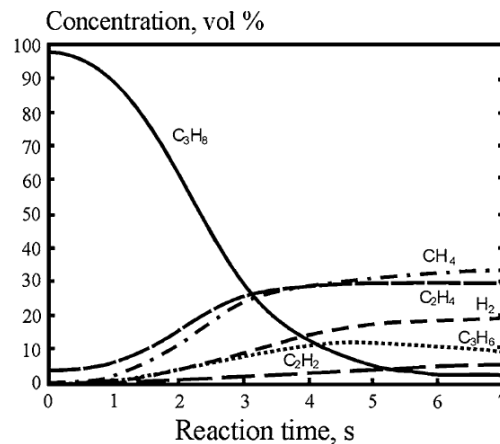
Задачи химической кинетики

Ввод кинетической схемы



Решение прямых и обратных задач
с использованием суперЭВМ.

Результаты расчетов



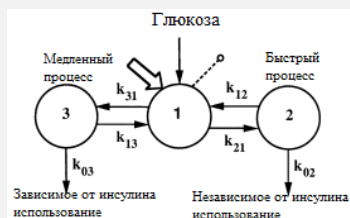
V.N. Snytnikov, T.I. Mischenko, V.I.N. Snytnikov, I.G. Chernykh. Autocatalytic dehydrogenation of propane // Research on Chemical Intermediates, 2014, Vol. 40, No. 1, pp. 345-356.

$$\frac{\partial c_P}{\partial t} = -k_2 c_C^2 c_D + k_{-2} c_B^3 - k_3 c_B^2 c_D + k_{-3} c_P^2$$

$$\frac{\partial c_P}{\partial t} = 2k_3 c_B^2 c_D - 2k_{-3} c_P^2$$

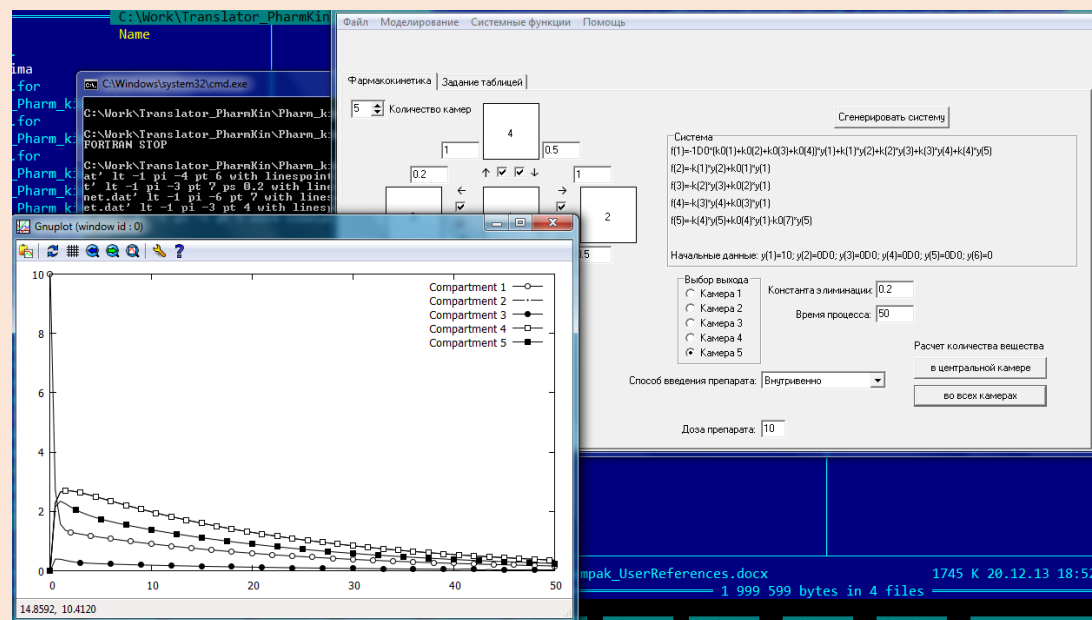
Задачи химической

Ввод фармакокинетической схемы



Решение прямых и обратных задач с использованием суперЭВМ.

Результаты расчетов



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Математические модели в иммунологии

- **M. Burnet** (1959) - клонально-селекционная теория.
- **J.S. Hege** и **G. Cole** (1966) – связь динамики антителообразования с количеством плазматических клеток.
- **G.I. Bell** (1970-1971), **C. Bruni** (1975-1979), **R. Mohler** (1978-1979), **А.М. Молчанов** (1971), **M. Jilek** (1971) - наиболее полное описание гуморальной иммунной реакции.
- **Г.И. Марчук** с **Р.В. Петровым** и **Н.И. Нисевич** (1978) - базовая модель инфекционного заболевания ([пример](#)).
- **Г.И. Марчук** (1980) и ученики **Г.А. Бочаров**, **А.А. Романюха**, **С.М. Зуев**, **Л.Н. Белых** (1982-1988) - [математическая модель](#) противовирусного иммунного ответа ([грипп А](#)).
- **A.S. Perelson**, **P.W. Nelson** (1999) – построение и исследование математических моделей внутриклеточной динамики ВИЧ ([примеры](#)).
- **M.A. Nowak** и **R.M. May** (2000) - [усложненная модель](#) динамики ВИЧ.
- **S.M. Blower** (1995-2004) - математическая модель эпидемии туберкулеза.
- **А.А. Романюха** и **А.И. Яшин** (2003) - математическая модель возрастных изменений.
- **Г.П. Кузнецова** (2003) - обратная задача инфекционного заболевания для модели Г.И. Марчука (аналитический метод).
- **B.M. Adams**, **H.T. Banks** et al. (2005) – уточнение двух параметров математической модели динамики ВИЧ по измерениям некоторых концентраций в фиксированные моменты времени.
- **Г.А. Бочаров** и др. (2015) – определение оптимального лечения в модели динамики ВИЧ.



Простейшая модель иммунологии Г.И. Марчука

Г.И. Марчук с Р.В. Петровым и Н.И. Нисевич (1978) построили и исследовали базовую модель инфекционного заболевания, позволившую в рамках единой схемы объяснить общие закономерности формирования и развития инфекционных заболеваний. **Особенность модели: впервые введена переменная $m(t)$.**

$V(t)$ – количество чужеродных размножающихся антигенов (патогенов),

$F(t)$ – количество антител (иммуноглобулины, иммуноглобулиновые рецепторы и пр.),

$C(t)$ – количество плазматических клеток (носители и продуценты антител),

$m(t)$ – доля пораженной массы органа-мишени.

Четвертое уравнение описывает изменение степени поражения органа-мишени:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \beta V(t) - \gamma F(t)V(t), \\ \frac{dC}{dt} = \alpha \xi(m) F(t - \tau)V(t - \tau) - \mu_C (C(t) - C^*), \\ \frac{dF}{dt} = \rho C(t) - (\mu_f + \eta \gamma V(t)) F(t), \\ \frac{dm}{dt} = \sigma V(t) - \mu_m m(t). \end{cases}$$

Базовая математическая модель инфекционного заболевания построена на основе соотношений баланса для каждой из переменных.

Поражение органа вследствие действия патогенов

Уменьшение степени поражения органа-мишени за счет регенерации

11 параметров

Математическая модель противовирусного Т-клеточного иммунного ответа

- Г.И. Марчук (1980) с учениками Г.А. Бочаровым, А.А. Романюхой, С.М. Зуевым, Л.Н. Белых (1982-1988) построили и исследовали математическую модель противовирусного иммунного ответа (**10 уравнений**), опирающуюся на принципы *клональной селекции* и *двойного распознавания*. Добавлены элементы:

макрофаги (M), H_E -хелперы, обеспечивающие пролиферацию цитотоксических Т-клеток, хелперы H_E , обеспечивающих пролиферацию В-клеток, цитотоксические Т-лимфоциты (E), В-лимфоциты (B), зараженные вирусом клетки (C_V).

$$\frac{dV}{dt} = \nu C_V + nb_{CE} C_V E - \gamma_{VF} FV - \gamma_{VM} MV - \gamma_{VC} (C^* - C_V - m) V,$$

$$\frac{dM_V}{dt} = \gamma_{MV} MV - \alpha_M M_V,$$

$$\frac{dH_E}{dt} = b_H^{(E)} [\xi(m) \rho_H^{(E)} M_V (t - \tau_H^{(E)}) H_E (t - \tau_H^{(E)}) - M_V H_E] - b_P^{(H_E)} M_V H_E E + \alpha_H^{(E)} (H_E^* - H_E),$$

$$\frac{dH_B}{dt} = b_H^{(B)} [\xi(m) \rho_H^{(B)} M_V (t - \tau_H^{(B)}) H_B (t - \tau_H^{(B)}) - M_V H_B] - b_P^{(H_B)} M_V H_B B + \alpha_H^{(B)} (H_B^* - H_B),$$

$$\frac{dE}{dt} = b_C^{(E)} [\xi(m) \rho_E M_V (t - \tau_E) H_E (t - \tau_E) E (t - \tau_E) - M_V H_E E] - b_{EC} C_V E + \alpha_E (E^* - E),$$

$$\frac{dB}{dt} = b_C^{(B)} [\xi(m) \rho_B M_V (t - \tau_B) H_B (t - \tau_B) B (t - \tau_B) - M_V H_B B] + \alpha_B (B^* - B),$$

$$\frac{dC}{dt} = b_C^{(C)} \xi(m) \rho_C M_V (t - \tau_C) H_B (t - \tau_C) B (t - \tau_C) + \alpha_C (C^* - C),$$

$$\frac{dC_V}{dt} = \sigma V (C^* - C_V - m) - b_{CE} C_V E - b_m C_V,$$

$$\frac{dF}{dt} = \rho_F C - \gamma_{FV} VF - \alpha_F F,$$

$$\frac{dm}{dt} = b_{CE} C_V E + b_m C_V - \alpha_m m.$$

44 параметра

Математическая модель острой респираторной инфекции, вызванной вирусами гриппа А

- Г.И. Марчук, Г.А. Бочаров, А.А. Романюха, С.Г. Руднев, Н.В. Перцев, А.С. Асаченков, U. Forus (1988-2006) исследовали математическую модель острой респираторной инфекции, вызванной вирусами гриппа А (**13 уравнений**).

Добавлены элементы: макрофаги (M), продуцирующие интерферон IFN- α (I), клетки эпителия (C), защищенные от вирусной инфекции.

$$\frac{dV}{dt} = \nu C_V + nb_{CE} C_V E - \gamma_{VF} FV - \gamma_{VM} MV - \gamma_{VC} (C^* - C_V - C_R - m) V,$$

$$\frac{dM_V}{dt} = \gamma_{MV} MV - \alpha_M M_V,$$

$$\frac{dH_E}{dt} = b_H^{(E)} [\xi(m) \rho_H^{(E)} M_V (t - \tau_H^{(E)}) H_E (t - \tau_H^{(E)}) - M_V H_E] - b_P^{(H_E)} M_V H_E E + \alpha_H^{(E)} (H_E^* - H_E),$$

$$\frac{dH_B}{dt} = b_H^{(B)} [\xi(m) \rho_H^{(B)} M_V (t - \tau_H^{(B)}) H_B (t - \tau_H^{(B)}) - M_V H_B] - b_P^{(H_B)} M_V H_B B + \alpha_H^{(B)} (H_B^* - H_B),$$

$$\frac{dE}{dt} = b_C^{(E)} [\xi(m) \rho_E M_V (t - \tau_E) H_E (t - \tau_E) E (t - \tau_E) - M_V H_E E] - b_{EC} C_V E + \alpha_E (E^* - E),$$

$$\frac{dB}{dt} = b_C^{(B)} [\xi(m) \rho_B M_V (t - \tau_B) H_B (t - \tau_B) B (t - \tau_B) - M_V H_B B] + \alpha_B (B^* - B),$$

$$\frac{dC}{dt} = b_C^{(C)} \xi(m) \rho_C M_V (t - \tau_C) H_B (t - \tau_C) B (t - \tau_C) + \alpha_C (C^* - C),$$

$$\frac{dF}{dt} = \rho_F C - \gamma_{FV} VF - \alpha_F F,$$

$$\frac{dC_V}{dt} = \sigma V (C^* - C_V - C_R - m) - b_{CE} C_V E - b_m C_V,$$

$$\frac{dm}{dt} = b_{CE} C_V E + b_m C_V - \alpha_m m,$$

$$\frac{dM_I}{dt} = \gamma_{MI} V (M_I^* - M_I) - \alpha_{MI} M_I, \quad \frac{dI}{dt} = \rho_I M_I - \alpha_I I - \sigma_I I (C^* - C_V - C_R - m), \quad \frac{dC_R}{dt} = \sigma_R I (C^* - C_V - C_R - m) - \alpha_R C_R.$$

Математическая модель динамики распространения ВИЧ на клеточном уровне

A.S. Perelson (1994), P.W. Nelson (1999) построили и исследовали модель динамики ВИЧ в ВИЧ инфицированных пациентах с антиретровирусной терапией $T_U(t)$ - неинфицированные клетки, $T_I(t)$ - инфицированные клетки, $V(t)$ - вирусная нагрузка)

$$6 \left\{ \begin{aligned} \frac{dT_U}{dt} &= \lambda - \rho T_U(t) - \eta T_U(t)V(t), \\ \frac{dT_I}{dt} &= \eta T_U(t)V(t) - \delta T_I(t), \\ \frac{dV}{dt} &= N\delta T_I(t) - cV(t). \end{aligned} \right.$$

$\downarrow +L(t)$

$V = V_I + V_{NI}$
 V_I - инфекционные вирионы;
 V_{NI} - неинфекционные вирионы

$$7 \left\{ \begin{aligned} \frac{dT_U}{dt} &= \lambda - \rho T_U(t) - \eta T_U(t)V(t), \\ \frac{dT_I}{dt} &= \eta T_U(t)V(t) - \delta T_I(t), \\ \frac{dV_I}{dt} &= (1 - \eta_{PI})N\delta T_I(t) - cV_I(t), \\ \frac{dV_{NI}}{dt} &= \eta_{PI}N\delta T_I(t) - cV_{NI}(t). \end{aligned} \right.$$

$$8 \left\{ \begin{aligned} \frac{dT_U}{dt} &= \lambda - \rho T_U(t) - \eta T_U(t)V(t), \\ \frac{dT_I}{dt} &= \eta T_U(t)V(t) + aL(t) - \delta T_I(t), \\ \frac{dL}{dt} &= f\eta T_U(t)V(t) - \mu_L L(t), \\ \frac{dV}{dt} &= N\delta T_I(t) - cV(t). \end{aligned} \right.$$

$+M, M^*$

L - латентно-инфицированные клетки

$$13 \left\{ \begin{aligned} + \frac{dM}{dt} &= s_M - d_M M(t) - \eta_M M(t)V(t), \\ + \frac{dM^*}{dt} &= \eta_M M(t)V(t) - \mu_M M^*(t), \\ \frac{dV}{dt} &= N\delta T_I(t) + p_M M^*(t) - cV(t). \end{aligned} \right.$$

M, M^* - долгоживущие инфицированные клетки

Математическая модель динамики распространения ВИЧ на клеточном уровне

М.А. Nowak и R.M. May (2000) исследовали усложненную модель динамики ВИЧ в ВИЧ инфицированных пациентах с антиретровирусной терапией (11 уравнений)

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{M}_0 &= 1 - M_0 \left(1 + \alpha_{M_{R5}} V_T^{Y,R5} + \alpha_{M_{X4}} V_T^{Y,X4} \right), \\ \dot{M}_\sigma^{R5} &= M_0 \left((1 - \varepsilon_1) \alpha_{M_{R5}} \left(V_\sigma^{Y,R5} + \varepsilon_2 (\Delta V)_\sigma^{Y,R5} \right) + \varepsilon_1 \alpha_{M_{X4}} \left(V_\sigma^{Y,X4} + \varepsilon_2 (\Delta V)_\sigma^{Y,X4} \right) \right) - M_\sigma^{R5}, \\ \dot{M}_\sigma^{X4} &= M_0 \left((1 - \varepsilon_1) \alpha_{M_{X4}} \left(V_\sigma^{Y,X4} + \varepsilon_2 (\Delta V)_\sigma^{Y,X4} \right) + \varepsilon_1 \alpha_{M_{R5}} \left(V_\sigma^{Y,R5} + \varepsilon_2 (\Delta V)_\sigma^{Y,R5} \right) \right) - \mu_{M_{X4}} M_\sigma^{X4}, \\ \dot{T}_\sigma^{R5} &= \Lambda + FT_\sigma^{R5} \left(Y_\sigma^{R5} + Y_\sigma^{X4} \right) \left(1 - \frac{T_\sigma^{R5}}{T_{MAX}} \right) \theta \left(1 - \frac{T_\sigma^{R5}}{T_{MAX}} \right) - T_\sigma^{R5} \left(V_T^{Y,R5} + V_T^{M,R5} \right) - \mu_{T_{R5}} T_\sigma^{R5} D \left(\frac{NT_\sigma^{R5}}{T_T^{R5}} \right), \\ \dot{T}_\sigma^{X4} &= \Lambda + FT_\sigma^{X4} \left(Y_\sigma^{X4} + Y_\sigma^{R5} \right) \left(1 - \frac{T_\sigma^{X4}}{T_{MAX}} \right) \theta \left(1 - \frac{T_\sigma^{X4}}{T_{MAX}} \right) - T_\sigma^{X4} \left(V_T^{Y,X4} + V_T^{M,X4} \right) - \mu_{T_{X4}} T_\sigma^{X4} D \left(\frac{NT_\sigma^{X4}}{T_T^{X4}} \right), \\ \dot{Y}_\sigma^{R5} &= T_T^{R5} (1 - \varepsilon_1) \left(V_\sigma^{Y,R5} + V_\sigma^{M,R5} + \varepsilon_2 \left((\Delta V)_\sigma^{Y,R5} + (\Delta V)_\sigma^{M,R5} \right) \right) + \\ &\quad + \varepsilon_1 T_T^{X4} \left(V_\sigma^{Y,X4} + V_\sigma^{M,X4} + \varepsilon_2 \left((\Delta V)_\sigma^{Y,X4} + (\Delta V)_\sigma^{M,X4} \right) \right) - Y_\sigma^{R5} \left(\mu_{T_{R5}} + \beta_5 T_\sigma^{R5} + \beta_4 T_\sigma^{X4} \right), \\ \dot{Y}_\sigma^{X4} &= T_T^{X4} (1 - \varepsilon_1) \left(V_\sigma^{Y,X4} + V_\sigma^{M,X4} + \varepsilon_2 \left((\Delta V)_\sigma^{Y,X4} + (\Delta V)_\sigma^{M,X4} \right) \right) + \\ &\quad + \varepsilon_1 T_T^{R5} \left(V_\sigma^{Y,R5} + V_\sigma^{M,R5} + \varepsilon_2 \left((\Delta V)_\sigma^{Y,R5} + (\Delta V)_\sigma^{M,R5} \right) \right) - Y_\sigma^{X4} \left(\mu_{T_{X4}} + \beta_5 T_\sigma^{R5} + \beta_4 T_\sigma^{X4} \right), \\ \dot{V}_\sigma^{M,R5} &= k_{M_{R5}} M_\sigma^{R5} - \mu_{V_{R5}} V_\sigma^{M,R5}, & \dot{V}_\sigma^{Y,R5} &= k_{Y_{R5}} Y_\sigma^{R5} - \mu_{V_{R5}} V_\sigma^{Y,R5}, \\ \dot{V}_\sigma^{M,X4} &= k_{M_{X4}} M_\sigma^{X4} - \mu_{V_{X4}} V_\sigma^{M,X4}, & \dot{V}_\sigma^{Y,X4} &= k_{Y_{X4}} Y_\sigma^{X4} - \mu_{V_{X4}} V_\sigma^{Y,X4}, \end{aligned} \right.$$

24 параметра

Модели динамики ВИЧ исследовали Hellerstein (1999); Hayns (2000); Bestilny (2000); Ribeiro (2002); B.M. Adams (2001); H.T. Banks (2002); D.M. Bortz (2003); R.M. Zinkernagel (2005); Г.А. Бочаров (2007) *etc.*

Здесь:

S_B — количество незараженных индивидов (вакцинированных)

L_A — количество латентно зараженных индивидов (с быстрым прогрессированием болезни)

L_B — количество латентно зараженных индивидов (с медленным прогрессированием болезни)

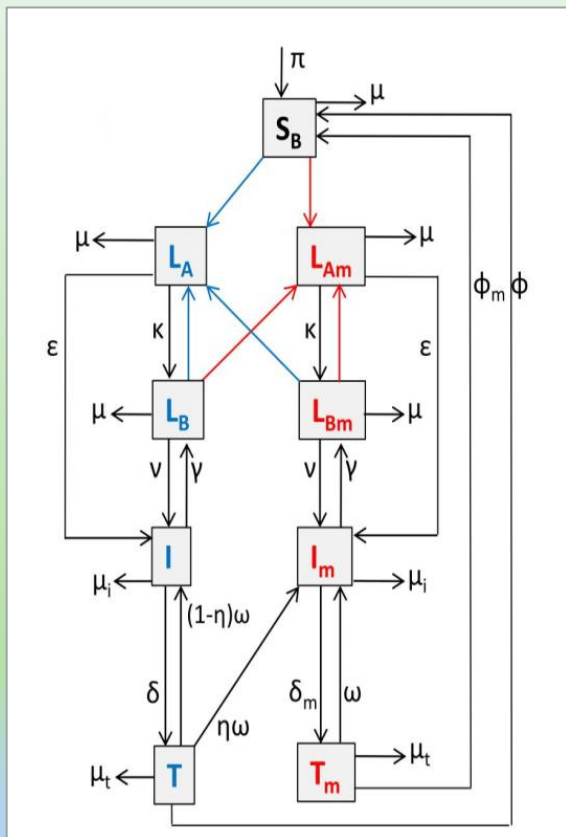
I — количество индивидов с активной формой болезни (не на лечении)

T — количество индивидов с активной формой болезни (на лечении)

*с коэф. m тоже самое для M

$$\lambda_d = \chi \beta \rho (I + oT) / N \quad \text{---} \text{blue arrow}$$

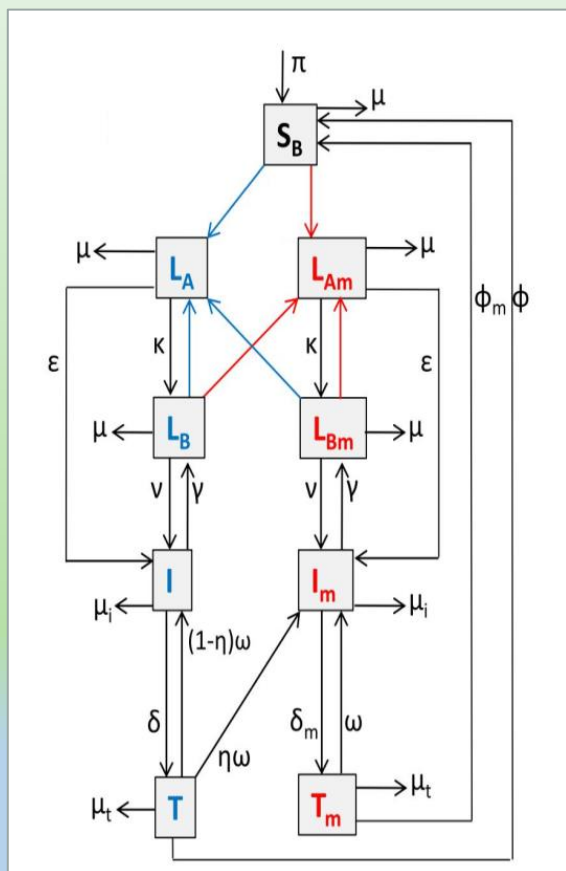
$$\lambda_{dm} = \chi \beta_m \rho (I_m + oT_m) / N \quad \text{---} \text{red arrow}$$



Описание параметров и переменных модели приведено в таблице.

*J.M. Trauer, J.T. Denholm, E.S. McBryde. Construction of a mathematical model for tuberculosis transmission in highly endemic regions of the Asia-pacific. Journal of Theoretical Biology. – 2014. – Vol. 358. – P. 74-84.





Описание параметров и переменных в таблице.

*J.M. Trauer, J.T. Denholm, E.S. McBryde. Construction of a mathematical model of tuberculosis transmission in highly endemic regions of the Asia-Pacific region. P. 74-84.

Таблица 1: Параметры модели

Величина	Описание	Единицы	Значение
Π	приток молодежи в модельную популяцию	чел/год	зависит от популяции
N	общее количество населения	чел	зависит от популяции
$1/\mu$	средняя ожидаемая продолжительность жизни	год	зависит от популяции
φ	скорость лечения от туберкулеза	чел/год	2
φ_m	скорость лечения от МЛУ-ТБ	чел/год	0.5
ε	скорость раннего прогрессирования болезни	год	0.129
k	скорость перехода к позднему прогрессированию болезни	год	0.821
γ	скорость спонтанного самоизлечения	год	0.63
ν	скорость развития активной формы болезни при эндогенной активации	год	0.075
η	вероятность развития штамма МЛУ-ТБ при лечении	-	0.035
ω	скорость ре-инфекции	чел/год	0.25
δ	скорость обнаружения индивидов с активной формой туберкулеза	чел/год	0.72
δ_m	скорость обнаружения индивидов с активной формой МЛУ-ТБ	чел/год	0.035
μ_i	смертность от туберкулеза без лечения	год	0.37
μ_t	смертность от туберкулеза во время лечения	год	$0.5\mu_i$
β	параметр контагиозности	-	зависит от популяции
β_m	параметр контагиозности для МЛУ-ТБ	-	0.7β
χ	доля инфекции	-	0.343
σ	параметр заразности индивидов во время лечения	-	0.6
l	скорость вакцинации БЦЖ	-	1

- Рассмотрим популяцию (тыс. чел)*: $S_B(0) = 249$, $L_A(0) = 8500$, $L_{Am}(0) = 1150$, $L_B(0) = 8656$,

$$L_{Bm}(0) = 1189, \quad I(0) = 34, \quad I_m(0) = 4, \quad T(0) = 51, \quad T_m(0) = 6.$$

- Прирост населения** $\Pi = 266$ (тыс. чел), общее количество человек в популяции*** $N = 19439$ (тыс. чел), $\mu = 0,016$, $\beta = 0,025$.
- Используя параметры из таблицы 1, генерируем синтетические данные.
- Предположим, что дополнительные статистические данные (за 4 года) известны только для функций S_B , T , T_m .
- С помощью приложения DAISY (Differential Algebra for Identifiability of SYstems) было установлено, что при таких условиях **обратная задача имеет единственное решение.**



*Туберкулез в Российской Федерации 2008 г. Аналитический обзор статистических показателей по туберкулезу, используемых в Российской Федерации – М., 2009. – 192 с.

**Рождаемость, смертность и естественный прирост населения по субъектам российской федерации (<http://www.gks.ru/>).

***Численность постоянного населения на 1 января (человек) 1990-2010 года (<http://www.fedstat.ru>).

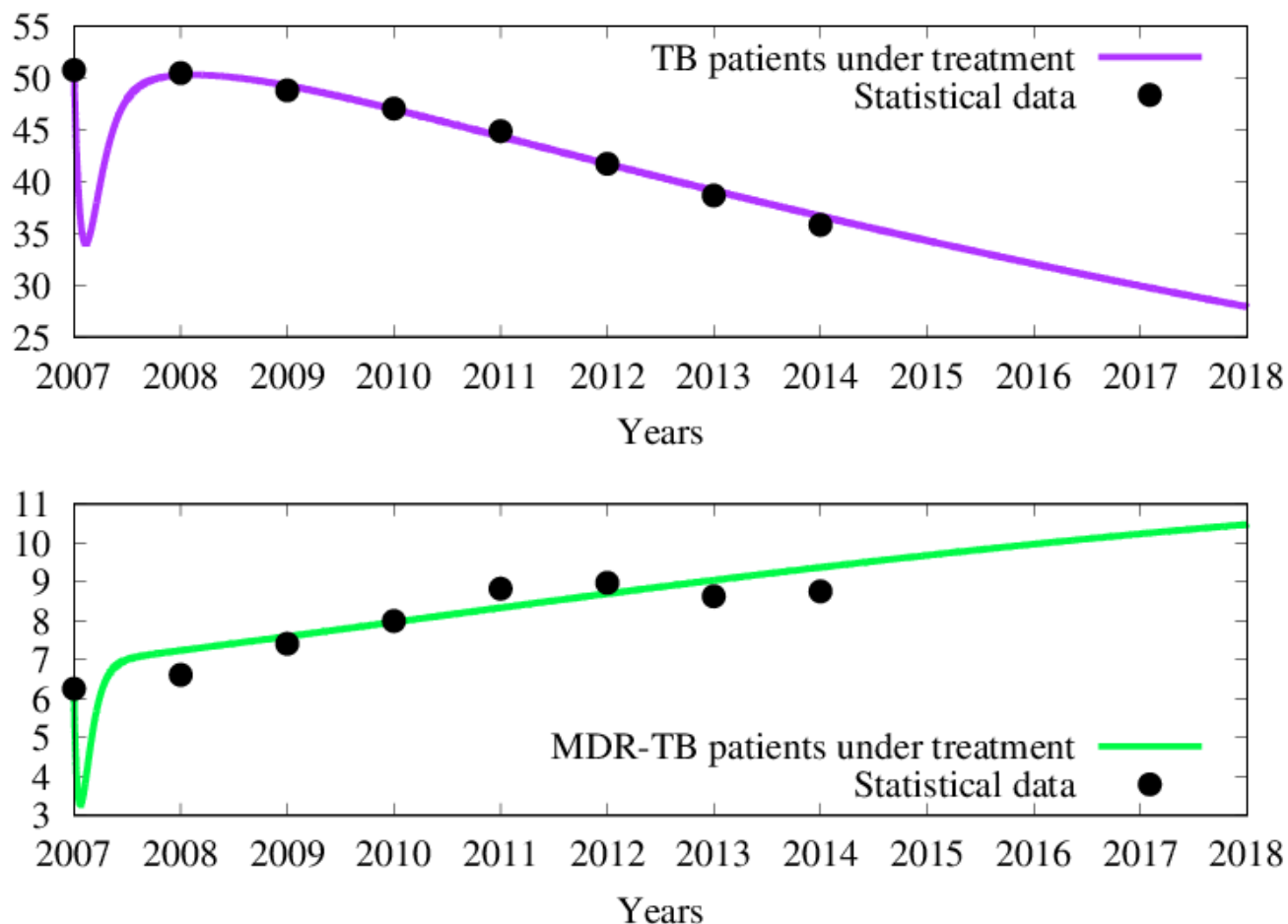
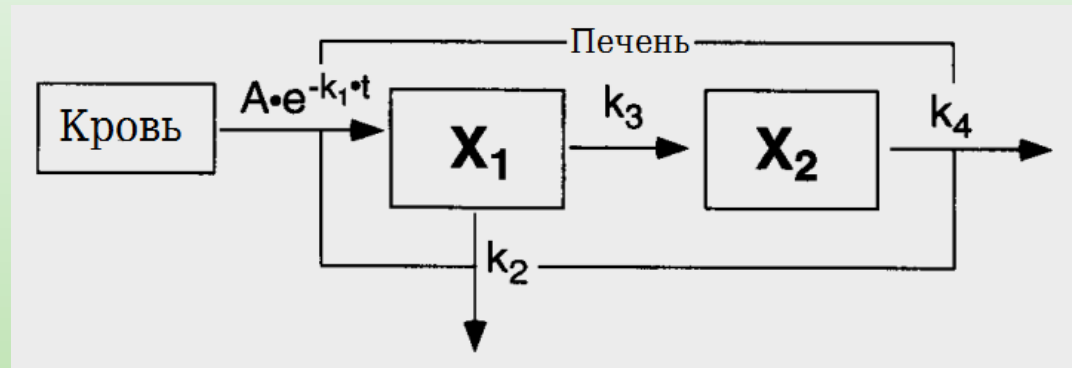


График прогнозирования к 2018 году количества (в тыс.чел.) больных туберкулезом (фиолетовая линия, 27924 чел.) и МЛУ-ТБ (туберкулезом с множественной лекарственной устойчивостью) (зеленая линия, 10477 чел.) в СФО, находящихся на лечении. Точками указаны статистические данные.

Approaches for solving inverse problems

Example

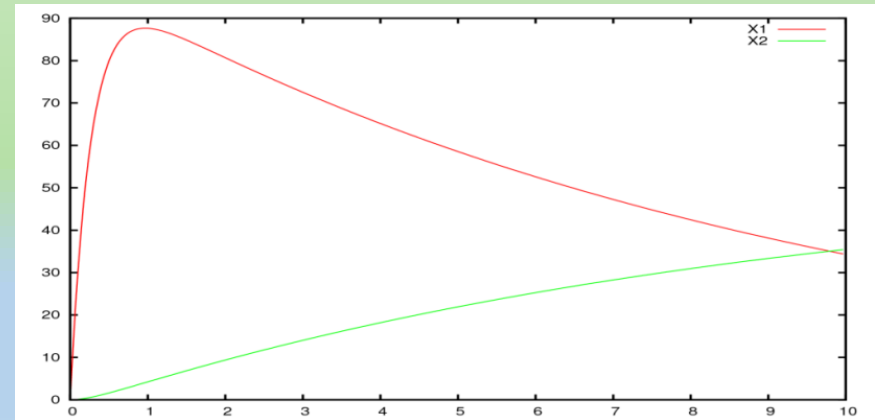
Фармакокинетический анализ радиофармацевтического соединения ($[^{123}\text{I}]\text{IPEA}$) для печеночной функции, основанной на бета-окислении



$$\begin{cases} \dot{X}_1 = A \cdot e^{-k_1 t} - (k_2 + k_3) \cdot X_1 \\ \dot{X}_2 = k_3 \cdot X_1 - k_4 \cdot X_2 \\ X_1(0) = 0, X_2(0) = 0. \end{cases}$$

X_1 - Кол-во $[^{123}\text{I}]\text{IPEA}$ в печени

X_2 - Кол-во радиоактивных продуктов метаболизма в печени



“Annals of Nuclear Medicine Vol. 13, No.4, 235-239, 1999”
N. Yamamura, Y. Magata, F. Yamashita, M. Hashida, H. Saji

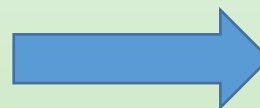
Начальное приближение:

Тяжелое повреждение печени гепатитом
$A = 310.9,$
$k_1 = 2.984$
$k_2 = 0.0339$
$k_3 = 0.05052$
$k_4 = 0.0013$

Точные параметры:

Без повреждения
$A = 416$
$k_1 = 3.931$
$k_2 = 0.0728$
$k_3 = 0.0754$
$k_4 = 0.0042$

Условие
остановки:
 $\|\delta q\| < 10^{-5}$



15
итераций

	Относительная погрешность решения $\ q - q_0^n\ /\ q\ $
A	10^{-7}
k_1	10^{-8}
k_2	10^{-7}
k_3	10^{-8}
k_4	10^{-6}

Обратная задача:

•Найти параметры $q = (A, k_1, k_2, k_3, k_4)$ по дополнительным данным о решении $X_1(t_k) = X_1^k, X_2(t_k) = X_2^k, k = 1, \dots, K$

Дополнительные данные берутся в 25 узлах на промежутке $[0,10]$

15 итераций



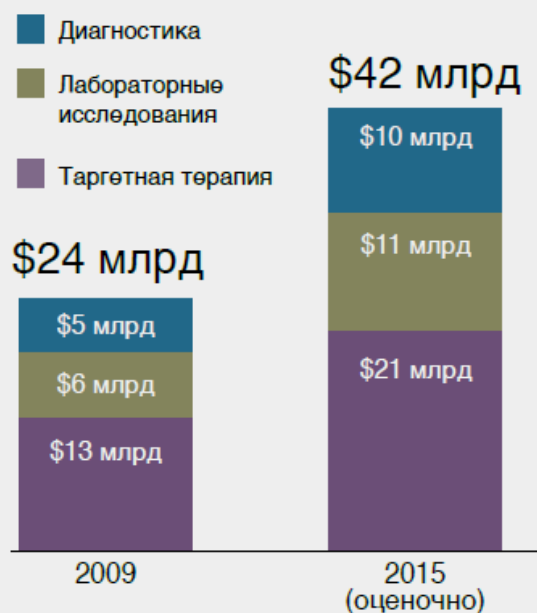
Программный комплекс IPE Pack.

*“Персональная медицина за счет рационального подбора лекарств, эффективности **станет дешевле нынешней**. И врачам надо постепенно менять свой менталитет, переходить именно к такой медицине”*

Акад. РАМН Михаил Перельман

*Во всех странах мира сохраняется высокая частота развития нежелательных лекарственных реакций, в т.ч. и серьезных, **приводящих к инвалидизации или даже смерти**, которые в некоторых странах выходят на 4–5 место среди всех причин смерти. Samani N.J., Tomaszewski M., Schunkert H. The personal genome-the future of personalised medicine? Lancet. 2010 May 1;375(9725):1497-8.*

Рост рынка персонализированной медицины



Персонализированная медицина

- Генная терапия и программирование
- Использование нанороботов для адресной доставки лекарств
- Регенеративная медицина
- Мобильная медицина
- Единые информационные системы в здравоохранении
- Мгновенная диагностика, автоматизированные лабораторные платформы
- 3D-моделирование в медицине

Программный комплекс IPE Pack

	Решение прямых задач	Решение обратных задач	Идентифицируемость	Дружелюбный интерфейс, визуализация	Подробный мануал	Версии для Linux, Macintosh, мобильных устройств
Другие разработки	+	-	-	-	+/-	+/-
The Biomedical Simulations Resource at the University of Southern California	+	+	-	-/+	+	-
David W.A. Bourne, OU College of Pharmacy, 1110 N. Stonewall Ave., Oklahoma City, OK 72117 U.S.A.	+	+	-	-	+	+/-
Мы	+	+	+	+	+	-



Рабочее место иммунолога

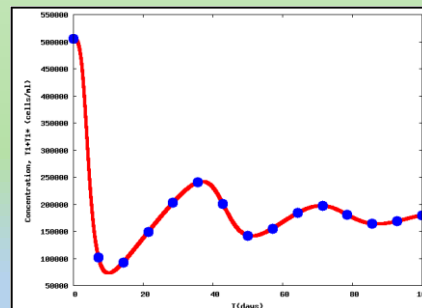
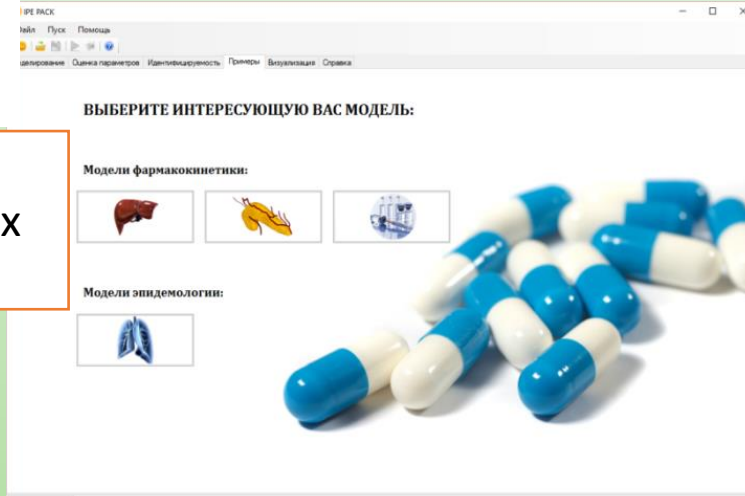


Данные анализов крови, урины, МРТ за несколько дней\часов



Переадресация информации о данных (фото) в программу

Доступный программный интерфейс

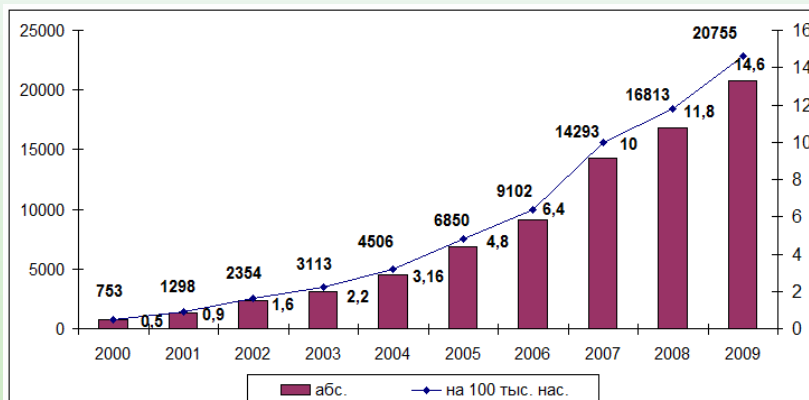


Рекомендации по оптимальному плану лечения переадресовываются на мобильное устройство.



Компьютерная программа распознает и обрабатывает полученные данные на основе численного решения обратных задач для математических моделей иммунологии.

Рабочее место эпидемиолога



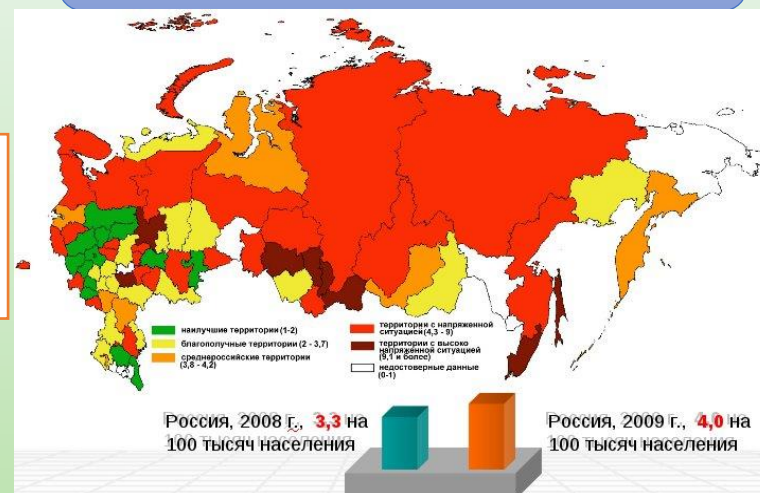
Статистические данные об эпидемиологической ситуации в выбранном регионе за несколько предыдущих лет



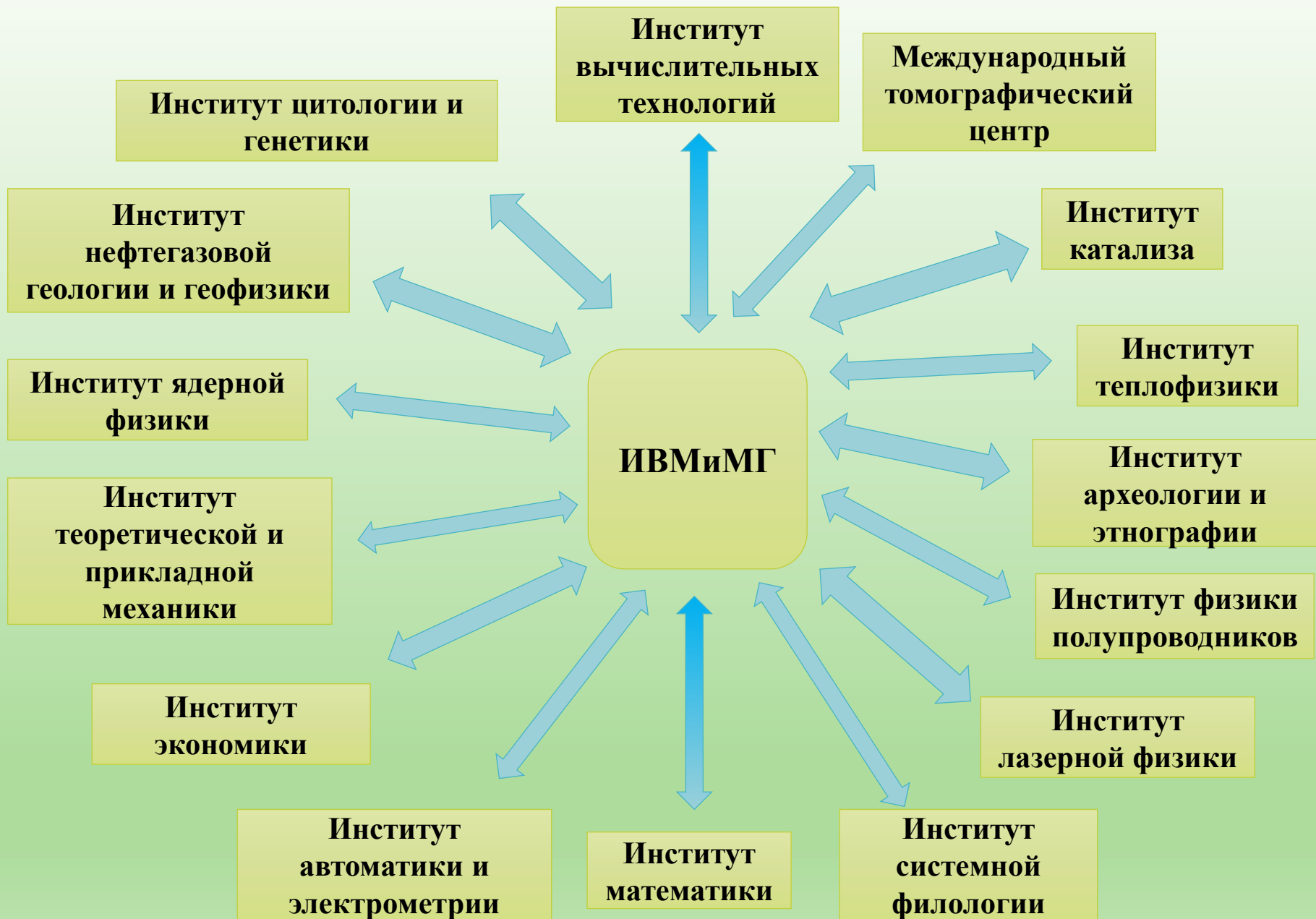
Прогноз эпидемии и рекомендации по ее предотвращению (например, о построении дополнительных диспансеров).

Выбор заболевания

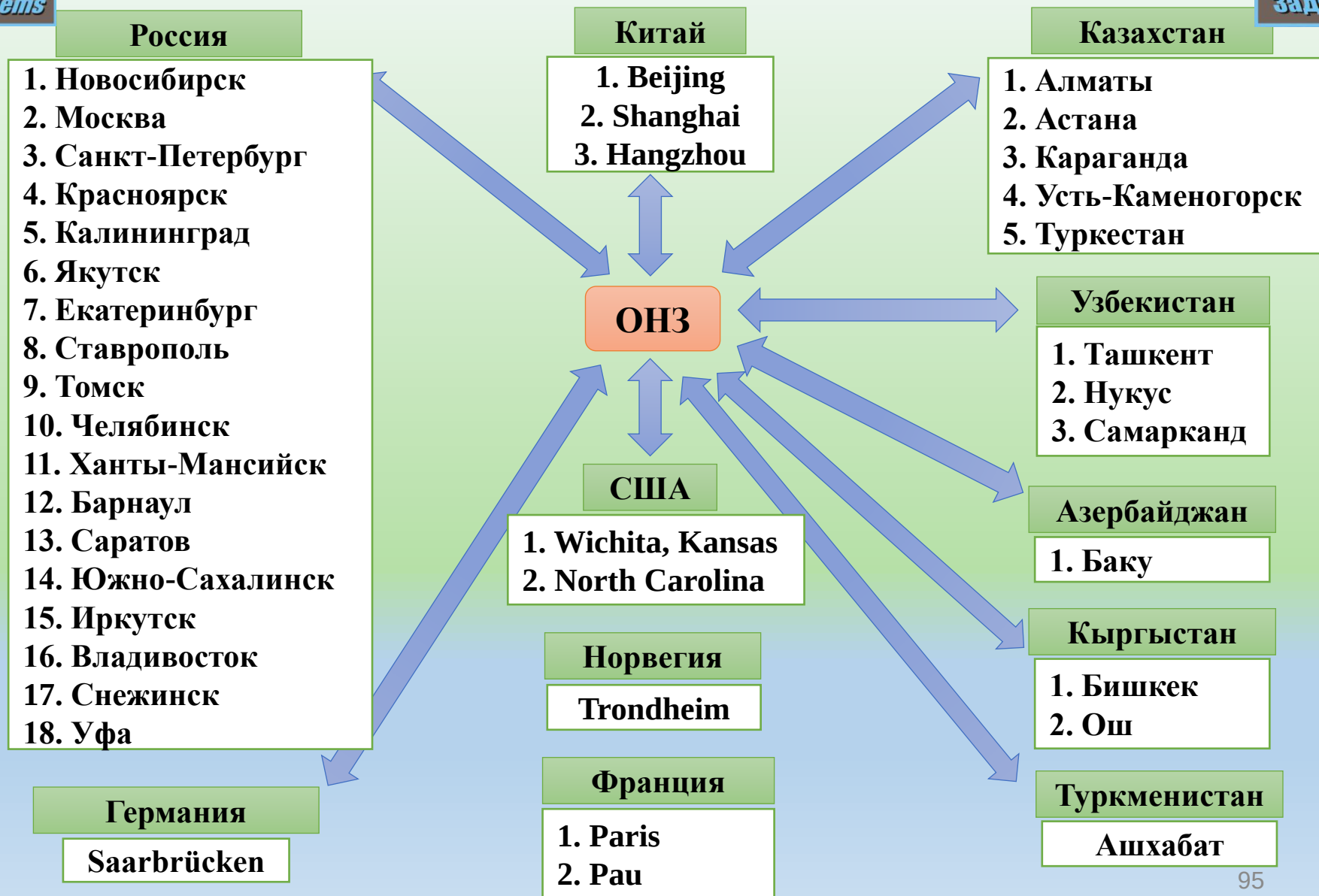
Доступный программный интерфейс



Компьютерная программа обрабатывает полученные данные на основе методов биостатистики и получает наиболее точную характеристику заболевания на основе численного решения обратных задач для математических моделей эпидемиологии.



Международная молодежная научная школа-конференция Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач



10 основных пользователей ЦКП ССКЦ ИВМиМГ СО РАН



В Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН разработана пятилетняя программа, направленная на создание фундаментальных заделов мирового уровня в области вычислительной математики, математического и компьютерного моделирования, и развития на этой основе интеллектуального ядра компьютерных систем нового поколения, ориентированных на повышение эффективности использования природных ресурсов Сибири и освоения Арктики.

В программе запланирован переход

от информационных систем,

ориентированных на сбор, систематизацию, хранение и анализ данных,

к проблемно-ориентированной интегрированной информационной среде

«Цифровая интеллектуальная Арктика»

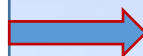
- системе интеллектуальных комплексов и сервисов на единой программно-информационной и технологической платформе

(на основе математического моделирования и систем обработки знаний с использованием суперкомпьютерных ресурсов, технологий параллельного программирования и облачных технологий).

Проблемы и задачи:

- Изучение сложнопостроенных геофизических сред, связанных с месторождениями нефти и газа методами численного моделирования.
- Моделирование системы комплексной безопасности для защиты территорий, населения и критически важных объектов от угроз чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера.
- Источники загрязнения и их влияние на Арктическую среду.
- Моделирование вулканических процессов в Арктической зоне.
- Предсказательное моделирование климата арктического бассейна.

Системы сбора и обработки информации



Электронная энциклопедия:

*математические модели,
математические методы и
численные алгоритмы*



**Проблемно-ориентированный
программный комплекс**



Информационные ресурсы

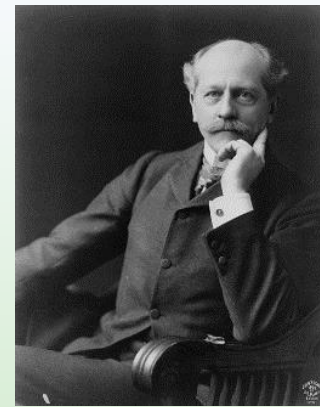




- В 1936 году В.А. Амбарцумян решает изящную математическую задачу определения распределения пространственных скоростей звёзд с помощью распределения их радиальных скоростей, поставленную знаменитым английским учёным Артуром Эддингтоном. Статья, содержащая это решение, была напечатана в «Monthly Notices» по представлению самого Эддингтона.
- Эта же математическая задача была независимо решена позже для целей медицинской компьютерной диагностики. За это решение и создание на его основе соответствующей аппаратуры Г. Н. Хаунсфилду (Англия) и А. М. Кормаку (США) была присуждена Нобелевская премия 1979 года по физиологии и медицине «За разработку компьютерной томографии».



Percival Lowell (1855-1916)



- **Персиваль Лоуэлл** — американский бизнесмен, востоковед, дипломат, астроном. Почётный член [Американской академии искусств и наук](#), Британского общества востоковедов, [Французского астрономического общества](#), Астрономических обществ [США](#), Бельгии, [Германии](#) и [Мексики](#). Удостоен [премии Жансена](#) Французского астрономического общества (1904), а также Золотой медали Астрономического общества Мексики (1908) — обе награды за исследования Марса. Почётный профессор астрономии [Массачусетского технологического института](#). В честь Лоуэлла названы кратеры [на Луне](#) и [на Марсе](#).
- Последние десять лет жизни, Лоуэлл посвятил поискам девятой планеты Солнечной системы, которую называл «планета Х». Его усилия не увенчались успехом. Плутон, однако, был обнаружен именно в обсерватории Лоуэлла, причём в месте, близком к расчётам Лоуэлла.

Метод Монте-Карло

Систему интегральных уравнений

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^m \int_X k_{ij}(x, y) \varphi(y) dy + h_i(x)$$

переписываем в виде: $\Phi = K\Phi + H$

Рассматриваем цепь Маркова $\{x_n\}$, $n = 0..N$, соответствующая переходной плотности $p(y, x)$, N – случайная величина последней точки цепи $x_0 \equiv x$.

Введем случайную величину

$$\xi_x = H(x) + \sum_{n=1}^N Q_n H(x_n),$$

где

$$Q_0 = I, Q_{n+1} = Q_n \frac{K(x_n, x_{n+1})}{p(x_n, x_{n+1})}$$

Откуда получаем для ξ_x :

$$\Phi(x) = E \xi_x \approx \frac{\xi_1 + \dots + \xi_M}{M}$$

S.I. Kabanikhin, K.K. Sabelfeld, N.S. Novikov, and M.A. Shishlenin. Numerical solution of the multidimensional Gelfand–Levitan equation. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2015. Vol. 23, No. 5.

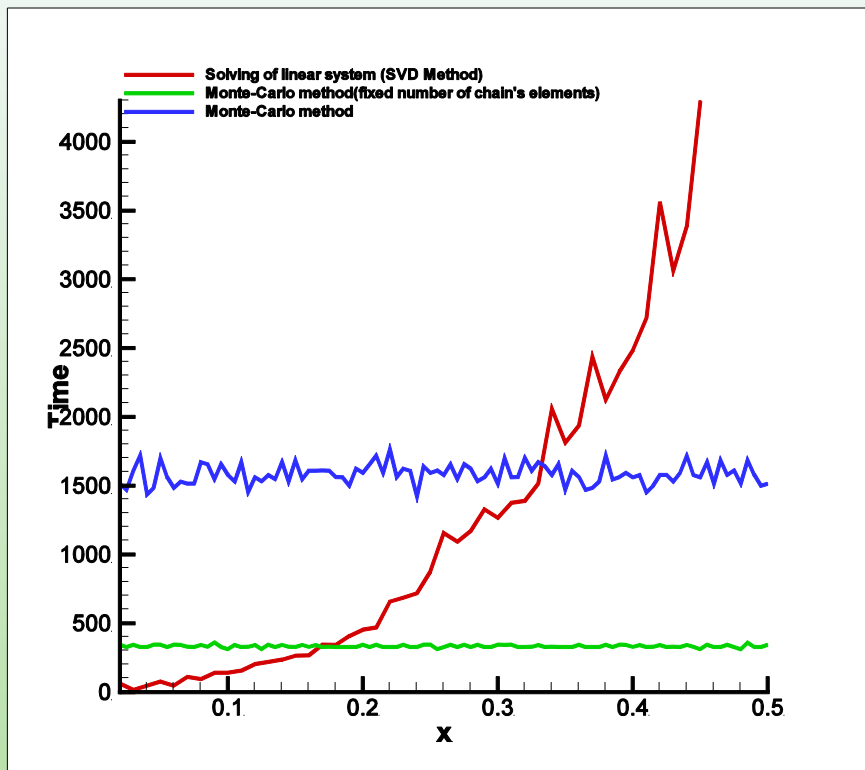
Особенности метода Монте-Карло

Преимущества:

- Вычислительные затраты зависят только от свойств ядра уравнения.
- Нет необходимости обращать матрицу системы.
- Метод позволяет вычислять решение уравнения Крейна в отдельно взятой точке.
- Метод допускает распараллеливание.

Проблемы:

- Сходимость ряда Неймана.
- Дисперсия случайной величины возрастает, при увеличении глубины восстановления.



Графики зависимости времени счета от глубины, на которой ищется решение обратной задачи.

- Красная кривая - SVD;
- Зеленая кривая – метод Монте-Карло короткая цепь Маркова
- Синяя кривая – метод Монте-Карло длинная цепь Маркова

Еще одно преимущество метода Монте-Карло – в памяти хранятся только данные обратной задачи (сейсмограммы).



Стохастический итерационно-проекционный метод, основанный на алгоритме Качмажа

Каждое уравнение (каждая строка a_{r_i}) СЛАУ $Ax = b$ определяет гиперплоскость.

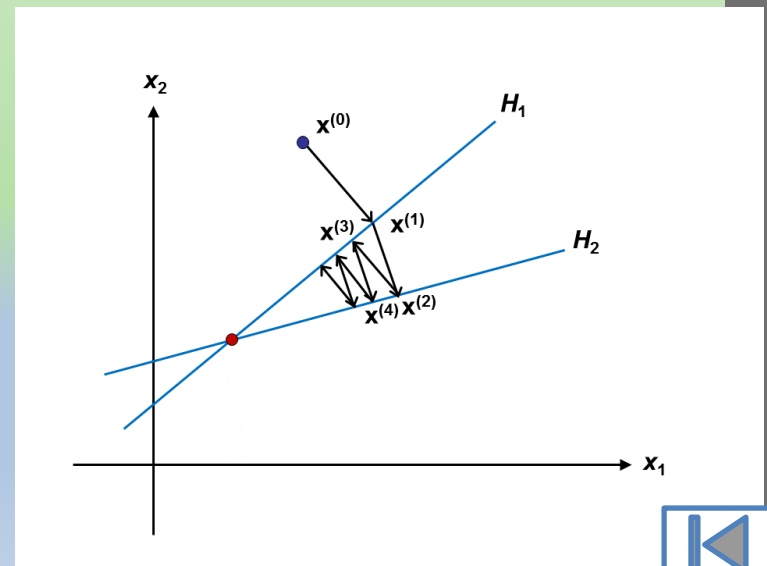
Метод основан на последовательной проекции текущего приближения на одну из гиперплоскостей:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{b_{r(i)} - (a_{r_i}, x_k)}{\|a_{r_i}\|^2} a_{r_i}$$

Случайный выбор строки матрицы (в соответствии с ее нормой) позволяет существенно увеличить скорость сходимости:

$$E(\|x_k - x\|_2^2) \leq (1 - \kappa(A)^{-2})^k \|x_0 - x\|_2^2,$$

Здесь $\kappa(A)$ - число обусловленности матрицы во фробениусовой норме.



Стохастический итерационно-проекционный метод

Преимущества:

- Быстрая сходимость: метод требует $O(n^2)$ операций. Возможные модификации метода (например, разделение по блок-строкам матрицы и проекция на пересечение соответствующих гиперплоскостей).
- Экономия памяти: каждая итерация использует только один столбец матрицы
- Метод не зависит от условий сходимости ряда Неймана.

Проблемы:

- Число обусловленности матрицы обычно неизвестно, значит нет оценок на требуемое количество итераций.

S.I. Kabanikhin, K.K. Sabelfeld, N.S. Novikov, and M.A. Shishlenin. Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods. Monte Carlo Methods and Applications. 2015. Vol. 21, No. 3.



- Мой научный руководитель Ольга Александровна Ладыженская получила книгу знаменитого ученика Гильберта – Курта Фридрихса из Нью-Йоркского университета, которая называлась «Математические аспекты квантовой теории поля». И у меня появилась мечта что-то сделать в этой области. Но я не хотел делать то, что делают остальные. Не хотел считать диаграммы, эффекты. Можно понять, что это такое, но этим заниматься не интересно. Там чистые вычисления. Мне хотелось заниматься чем-то концептуальным. Поэтому надо было найти разумную модель теории поля.
- В этот момент, в середине 50-ых годов (это было уже после успеха квантовой электродинамики конца 40-ых годов, о котором я расскажу на лекции) в этой области царил полное разочарование, источником которого в основном был Л. Д. Ландау. Я об этом расскажу. И квантовой теорией поля многие перестали заниматься.
- И случайным образом я вышел на модель теории поля, которая была абсолютно не физической, но красивой. Сейчас она называется теорией Янга-Миллса, поля Янга-Миллса – калибровочные поля. В современной Стандартной модели они – главный объект. Тогда эта модель казалась очень странной. А теперь, благодаря калибровочным полям, теория поля вновь возродилась.



Издательство: М.: Атомиздат,
303 страницы, 1970 г.



Отметим еще две созданные в то время расчетные программы (В.Е.Колесов, С.М.Ермаков), которые были первыми такого рода программами в нашей стране (отчеты ФЭИ инв.№2586, **1959** и инв.№176 ДСП, 1959). Первая – программа расчета на ЭВМ "Стрела" нейтронных сечений по оптической модели атомного ядра для потенциала с размытым краем (так называемый потенциал Вудса-Саксона). По программе проводились массовые расчеты, а в дальнейшем она стала прототипом последующих программ расчета нейтронных сечений на более мощных ЭВМ (В.Е.Колесов, А.Г.Довбенко и др.).

Как член Исполкома союза математиков в 60-х годах я побывал в ряде старых и новых зарубежных научных центров - в Париже, Гренобле, Хельсинки, Цюрихе, Лозанне, Нью-Йорке, Канберре, Софии и Варшаве.

Мне было приятно видеть происшедшее в эти годы заметное улучшение отношений между советскими и зарубежными учеными.

Немалую роль в этом сыграли советско-американский симпозиум по дифференциальным уравнениям с частными производными в Новосибирске в 1963 году,



- Советско-американский симпозиум в Новосибирске явился первой научной встречей математиков двух стран, на которой было представлено столь большое число выдающихся ученых с обеих сторон. Делегацию США возглавлял крупный математик Р.Курант, создатель одного из лучших в Америке математических институтов. Он привез с собой своих учеников, также видных математиков.
- Советскую науку представляли как ученые старшего поколения, известные в математическом научном мире, так и молодые исследователи. Этот симпозиум послужил повышению авторитета и всей нашей науки, и молодого Новосибирского научного центра. После него заметно расширились наши международные связи.



Участники симпозиума

Бабич Василий Михайлович, Березанский Юрий Макарович, Бесов Олег Владимирович, Векуа Илья Несторович, Вишик Марко Иосифович, Годунов Сергей Константинович, Зеленьяк Тадей Иванович, Ильин Арлен Михайлович, Ильин Владимир Александрович, A.P. Calderon, Крейн Марк Григорьевич, Крейн Селим Григорьевич, Richard Courant, Лаврентьев Михаил Михайлович, Peter Lax, Louis Nirenberg, Мазья Владимир Гилелевич, Марчук Гурий Иванович, Масленникова Вера Николаевна, Никольский Сергей Михайлович, Овсянников Лев Васильевич, Олейник Ольга Арсеньевна, Похожаев Станислав Иванович, Robert Richtmyer, Рождественский Борис Леонидович, Рябенский Виктор Соломонович, Соболев Сергей Львович, Тихонов Андрей Николаевич, Фаддеев Людвиг Дмитриевич, M. Schechter и другие.

Последний визит Г.И. Марчука в Академгородок





JOURNAL OF INVERSE AND ILL-POSED PROBLEMS

IMPACT FACTOR 0.987

Editor-in-Chief Sergey I. Kabanikhin

Managing Editor Maxim A. Shishlenin

Advisory Board

Avner Friedman, Columbus, **Rudolf Gorenflo**, Berlin, **Peter Lax**, New York, **Zuhair Nashed**, Orlando, **Vladimir V. Romanov**, Novosibirsk, **Pierre Sabatier**, Montpellier, **Vladimir V. Vasin**, Ekaterinburg

Editorial Board

Alexander L. Ageev, Ekaterinburg, **Giovanni Alessandrini**, Trieste, **Yurii Ye. Anikonov**, Novosibirsk, **H. Thomas Banks**, Raleigh, **Michael I. Belishev**, St. Petersburg, **Alexander L. Bukhgeim**, Wichita, **Jin Cheng**, Shanghai, **Christian Clason**, Graz, **Alexander M. Denisov**, Moscow, **Heinz W. Engl**, Vienna, **Maurizio Grasselli**, Milan, **Dinh Nho Ha'o**, Hanoi, **Alemdar Hasanoglu**, Izmir, **Bernd Hofmann**, Chemnitz, **Mikhail Yu. Kokurin**, Yoshkar-Ola, **Rainer Kress**, Göttingen, **Daniel Lesnic**, Leeds, **Alfred K. Louis**, Saarbrücken, **Andreas Neubauer**, Linz, **Roman G. Novikov**, Paris/Moscow, **Lassi Paivarinta**, Helsinki, **Valery V. Pickalov**, Novosibirsk, **Alexey I. Prilepko**, Moscow, **Vladislav V. Pukhnachev**, Novosibirsk, **Paul Sacks**, Ames, **Otmar Scherzer**, Vienna, **Samuli Siltanen**, Helsinki, **Gunther Uhlmann**, Seattle, **Yanfei Wang**, Beijing, **Anatoly G. Yagola**, Moscow, **Masahiro Yamamoto**, Tokyo, **Vyacheslav A. Yurko**, Saratov, **Jun Zou**, Hong Kong.



Факторизация обратной блочно-теплицевой матрицы

- Найдем A^{-1} , в общем случае, может быть построена на подмножестве элементов матрицы $\{a_{ij}^{-1}\}$.
- Пусть A блочно-теплицева, состоящая из $n \times n$ блоков размерности $p \times p$.
- Выполняется следующее представление :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_0 \end{bmatrix} x_0^{-1} \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & \dots & z_{n-1} \\ 0 & z_0 & \dots & z_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z_0 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ y_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n-2} & y_{n-3} & \dots & 0 \end{bmatrix} y_{n-1}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & w_0 & \dots & w_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & w_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Здесь x_i, z_j, y_k, w_l - блоки компонент из блоков столбцов x, z и блоков строк y, w , такие что

$$A \begin{bmatrix} x_0 & z_0 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \vdots \\ \vdots & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_0 & \dots & y_{n-1} \\ w_0 & \dots & w_{n-1} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I \end{bmatrix}$$

Обратная матрица к блочно-теплицевой может быть восстановлена по ее первому блоку строк и последнему блоку столбцов.

Рассмотрим рекурсивный алгоритм для вычисления первого и последнего блока столбцов обратной матрицы A^{-1} .

Пусть A_k -ведущая подматрица блочно-теплицевой матрицы A :

$$A_0 = a_0, A_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}, \dots, A_{n-1} = A.$$

Предположим, что блоки столбцов x^k, z^k : $A_k \begin{bmatrix} x^k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & I \end{bmatrix}$, известны. Получим x^{k+1}, z^{k+1} .

Используя свойства x^k , запишем:

$$A_{k+1} \begin{bmatrix} x^k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & A_k & & a_{k+1} \\ & & & a_k \\ a_{-k+1} & a_{-k} & \dots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \epsilon_x^n \end{bmatrix}$$

Здесь невязка $\epsilon_x^n = a_{-k+1}x_0^k + \dots + a_{-1}x_{k-1}^k$. Аналогично для z^k :

$$A_{k+1} \begin{bmatrix} 0 \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{k+1} \\ a_{-1} & & & \\ \dots & & A_k & \\ a_{-k+1} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_z^n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Идея: найти линейную комбинацию $\begin{bmatrix} x^k \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 \\ z^k \end{bmatrix}$, чтобы занулить ϵ_x^n и ϵ_z^n в правой части.

Рассмотрим комбинацию

$$x^{k+1} = \alpha_x^n \begin{bmatrix} x^k \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_x^n \begin{bmatrix} 0 \\ z^k \end{bmatrix}, z^{k+1} = \alpha_z^n \begin{bmatrix} x^k \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_z^n \begin{bmatrix} 0 \\ z^k \end{bmatrix}$$

Коэффициенты $\alpha_x^n, \alpha_z^n, \beta_x^n, \beta_z^n$ определим, используя следующее соотношение

$$A_{k+1} \begin{bmatrix} x^{k+1} & z^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Получим систему:

$$\begin{bmatrix} I & \epsilon_x^n \\ \epsilon_z^n & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x^n & \alpha_z^n \\ \beta_x^n & \beta_z^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Решая систему, получим переход $x^k, z^k \rightarrow x^{k+1}, z^{k+1}$.

Таким образом, данный алгоритм позволяет вычислить последовательность блока столбцов $x^0 = z^0 = a_0^{-1} \rightarrow x^1, z^1 \rightarrow \dots \rightarrow x^{n-1} = x, z^{n-1} = z$.

Рекурсивный алгоритм для вычисления первого и последнего блока строк u, w можно выписать аналогичным образом.

